Universidade de Lisboa

Instituto de Educação

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Dificuldades na Resolução de equações de 2.º grau dos alunos do 8.º ano

Helena Sofia Sousa Garcez Martins

Mestrado em Ensino da Matemática

2014

Universidade de Lisboa

Instituto de Educação

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Dificuldades na Resolução de equações de 2.º grau dos alunos do 8.º ano

Helena Sofia Sousa Garcez Martins

Orientador: Professor Doutor Henrique Guimarães
Coorientador: Professora Doutora Suzana Nápoles

Mestrado em Ensino da Matemática
2014

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço aos meus orientadores Professor Henrique Guimarães, Professora Suzana Nápoles e professor Paulo Alvega, por todos ensinamentos ao longo deste ano. Aprender com quem trabalha com o ensino da matemática com tanto gosto foi um prazer e aumentou ainda mais a minha vontade de ser uma professora de matemática atenta, rigorosa e preocupada com a aprendizagem dos alunos.

Agradeço também a todos os Professores que me acompanharam ao longo destes dois anos de mestrado, pois, mesmo que indiretamente, contribuíram com os seus ensinamentos para que este trabalho se realizasse.

Agradeço muito à minha colega Andreia por todas as reflexões e trabalhos em conjunto mas também por todos os momentos de descontração e brincadeira. Este ano foi muito mais divertido contigo.

Não posso também deixar de referir os meus colegas, Marisa, Ana Alexandra, Rute e Artur, por estes dois anos tão agradáveis.

Por fim, mas não por último, à minha família. Sem ela nada seria possível. Mãe, Pai, João e Avós Marias, vão ser sempre a minha maior fonte de sabedoria, apoio, juízo e alegria. Sem nunca me esquecer que os amigos são a minha segunda família, Francisco, obrigada por seres a minha âncora, Rute, Daniela, a minha fiel professora de português, Mafalda, Marta, Filipa, Susana, Cláudia, Ana Matias, Ana Paixão, Sílvia Santos, Sílvia Leite, Rita, Bernardo, João, Guilherme, Inês, obrigada por estarem sempre quando são precisos.

Resumo

Este estudo surge da vontade de compreender como os alunos do 8.º ano aprendem as equações de 2.º grau. Nomeadamente, no âmbito do tópico “Equações de 2.º grau a uma incógnita”, da unidade “Equações” e foi desenvolvido ao longo de seis aulas de uma turma de 8.º ano da Escola Secundária Padre Alberto Neto. Desta forma, tem como objetivo compreender as principais dificuldades que os alunos manifestam na resolução de equações de 2.º grau do 8.º ano. Procurei, por isso, compreender quais os significados que os alunos do 8.º ano atribuem à solução de uma equação de 2.º grau, como procedem para resolver uma equação deste tipo e qual o tipo de dificuldades que manifestam.

Baseando-se na lecionação das aulas, a investigação que realizei para este estudo segue uma metodologia qualitativa. Os principais instrumentos utilizados na recolha de dados foram a observação de aulas e a análise documental, em particular das produções escritas dos alunos. As aulas e as tarefas realizadas com os alunos tiveram uma abordagem exploratória e os alunos foram avaliados continuamente através da observação e questionamento dos alunos em aula, e da análise das suas produções escritas em aula e testes de avaliação.

A análise dos dados recolhidos evidencia que os alunos têm dificuldade em compreender o significado de solução de uma equação, desenvolvendo entendimentos erróneos sobre esse significado, e em compreender que uma equação do 2.º grau pode ter até duas soluções. Há também evidência para afirmar que os alunos compreendem de diferentes formas o processo de resolução de uma equação de 2.º grau do tipo das que são estudadas no 8.º ano, mostrando dificuldades ao nível da manipulação algébrica — por exemplo, na utilização dos parênteses, na prioridade das operações, aplicação dos princípios de equivalência— este ano acrescidas na presença dos casos notáveis da multiplicação e da lei do anulamento do produto.

Palavras-chave: Álgebra; Equações do 2.º grau; Solução de uma equação; Processo de resolução; Dificuldades dos alunos.

Abstract

This study arises from my desire to understand how 8th grade students learn 2nd degree equations. Therefore, it appears under “Equations” unit, namely in the topic "2nd degree equations of one unknown" and was developed over six lessons in an 8th grade class of Escola Secundária Padre Alberto Neto. Thus, my study aims to understand the main students’ difficulties in solving the kind of 2nd degree equations which are taught in 8th grade. With this in mind, I sought to understand the meanings of the 2nd degree equations’ solution developed by the students, as well as how they proceed to solve an equation of this type and what kind of difficulties they manifest.

Relying on the classes and respective analysis, this study has a qualitative methodology. The main data used in data collection were classroom observation, analysis of written productions and documentary collection.

The lessons and tasks performed with the students had an exploratory approach and the students were continuously evaluated through observation of lessons, analysis of their writings in class and assessment tests productions.

The analysis of the collected data shows that students have difficulty understanding the meaning of solving an equation , developing erroneous understandings about this meaning, and that students have difficulty understanding that a 2nd degree equation can have up to two solutions . There is also evidence to say that students understand the process of solving a 2nd degree equation of the type that are studied in 8th grade in different ways, showing difficulty with algebraic manipulation - for example , the use of parentheses , the priority of operations , applying the principles of equivalence - this year increased by the presence of notable cases of multiplication and use the null-factor law.

Keywords: Algebra, 2nd degree Equations, Solution of the Equation, The Resolution Process, Students' Difficulties

Índice

Índice de Ilustrações

Índice de Tabelas

1 - Introdução

Este Relatório é o culminar de dois anos de mestrado, onde o meu objetivo sempre foi aprender a ser professora. Este trabalho permitiu-me, enquanto futura professora, aprofundar e refletir as minhas capacidades e confrontar-me com as dificuldades do professor de matemática. Ainda que toda a nossa carreira profissional esteja repleta de aprendizagem e novos conhecimentos, o processo de investigação, mesmo sendo em pequena escala, permitiu-me refletir com mais profundidade no que é a prática letiva e todas as suas dimensões e implicações.

Depois de algumas considerações e análise da planificação anual da disciplina de matemática do 8.º ano optei por escolher este tema devido à dificuldade que os alunos manifestam na área da Álgebra. Introduzir conceitos algébricos será sempre difícil e por isso considerei importante explorar este tema num ano em que estive acompanhada por profissionais com muita experiência. Tendo optado pela unidade das equações de 2.º grau, pude explorar e estudar as dificuldades que surgem nos alunos, assim como aprender a superá-las através dos conselhos dados pelos Professores que me acompanharam e através da investigação que fiz nesta área.

Para desenvolver este trabalho contei com a preciosa colaboração dos alunos da turma C do 8.º ano da Escola Secundária Padre Alberto Neto ao longo de seis aulas (quatro de 90 minutos e duas de 45 minutos) que tiveram início a 17 de março de 2014 e terminaram a 26 de março do mesmo ano.

Com este trabalho pretendo perceber quais as dificuldades que surgem na resolução de equações de 2.º grau por parte dos alunos desta turma do 8.ºano, assim como os procedimentos que estes utilizam para as resolver, esperando que com estes dados possa aprender um pouco mais sobre os alunos do 8º ano em geral. Refiro-me, especificamente, à forma como os alunos manipulam as equações incompletas de 2.º grau, quais as principais dificuldades na fatorização de polinómios e na manipulação de equações de 2.º grau com os casos notáveis e na compreensão da utilidade dos mesmos, as dificuldades que surgem na resolução de problemas que envolvam equações de 2.º grau e, finalmente, as dificuldades que surgem na compreensão do significado de solução de uma equação de 2.º grau.

Neste sentido, o meu objetivo é compreender as principais dificuldades que os alunos manifestam na resolução de tarefas envolvendo equações do 2.º grau e para isso estabeleci as seguintes questões:

- Que significado atribuem os alunos à solução de uma equação do 2.º grau em contextos diversificados? Que dificuldades manifestam?
- Como procedem os alunos para resolver tarefas que envolvam equações de 2.º grau? Que dificuldades manifestam?

Para que conseguisse responder a estas questões optei por elaborar tarefas que acentuassem as dificuldades referidas nas questões.

Não querendo desviar-me da estrutura usual deste tipo de trabalho, começo por fazer uma pequena contextualização do tema que aqui me traz, tendo por base a investigação já feita na área. Passo depois a apresentar a unidade de ensino em que me centrei, apresentando a escola e a turma, a unidade temática, as estratégias de ensino, a sequência de tarefas que apresentei aos alunos e uma descrição das aulas, acompanhada de uma breve reflexão. Apresento depois a minha investigação, que inclui uma breve descrição dos dados recolhidos, tendo em conta a problemática em causa. Por fim, apresento uma reflexão final sobre a aprendizagem que realizei ao longo deste ano.

Espero, por fim, que este trabalho seja tão útil para o leitor como foi para mim no que diz respeito ao esclarecimento dos significados que os alunos atribuem à solução de uma equação de 2.º grau e dos procedimentos que os alunos seguem para resolver tarefas que envolvam equações deste tipo, assim como das dificuldades inerentes.

2 - Enquadramento curricular e didático

O ensino da Álgebra

No Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, é notória a visibilidade conferida à Álgebra, sendo considerada como uma forma de pensamento matemático logo desde os primeiros anos e não apenas como uma ferramenta de trabalho. De entre os muitos autores que contribuíram para esta mudança de direção no ensino da Álgebra, destaca-se o nome Kaput (in Ponte et al, 2009) que identificou cinco facetas do pensamento algébrico, em 1999, identificando os dois primeiros como "aspetos nucleares" (core aspects) e os três últimos como vertentes (stands) da álgebra:

- Generalização e formalização de padrões e repetições;
- Manipulação de formalismos guiada sintaticamente;
- O estudo de estruturas abstratas;
- O estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis;
- Utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenómenos.

Esta visão é igualmente partilhada pelo NCTM, 2008, que nos diz que o pensamento algébrico passa por:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a variação em diversos contextos

Ponte et al (2007) chamam ainda a atenção para a importância que se deve dar às relações existentes entre os objetos algébricos além da importância dos próprios objetos, tendo em vista a melhoria do raciocínio abstrato dos alunos. Assim se vê que o pensamento algébrico não se reduz à manipulação do simbolismo formal. Ponte et al (2007), na Tabela 1, identificam as três vertentes do pensamento algébrico: representar, raciocinar e resolver problemas:

Tabela 1 – Vertentes do pensamento algébrico

Representar	Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas

	de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	Relacionar (em particular, analisar propriedades); Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Assim sendo, são estas as capacidades, no ramo da Álgebra, que se pretende que os alunos dominem no final do seu percurso escolar.

No entanto, qual o percurso que deveremos seguir para tornar possível o desenvolvimento do pensamento algébrico tal como descrito anteriormente? Como futura professora de Matemática entendo que esta é uma das dificuldades mais marcantes do ensino devido à sua componente abstrata. Ao longo dos tempos várias abordagens didáticas ao ensino da Álgebra foram sugeridas, James Kaput e Maria Blanton (em Ponte et al, 2007) defendem o desenvolvimento do pensamento algébrico como uma orientação transversal do currículo de forma a que a aprendizagem da Álgebra:

- Promova hábitos de pensamento e de representação em que se procure a generalização, sempre que possível;
- Trate os números e as operações algebricamente – prestando atenção às relações entre objetos algébricos (além dos objetos numéricos) como objetos formais para o pensamento algébrico;
- Promova o estudo de padrões e regularidades, logo desde o 1º ciclo.

Como se vê esta é a corrente defendida pelo Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, que assume o propósito principal do ensino da Álgebra como:

Desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos.

ME 2007, p. 55

Neste sentido, a preocupação principal do professor de Matemática no ensino da Álgebra não deverá centrar-se no domínio da manipulação de expressões algébricas por parte dos alunos, mas sobretudo no desenvolvimento da sua compreensão, da capacidade de interpretação e representação dos mesmos, para que os nossos alunos desenvolvam o pensamento algébrico e não apenas a repetição dos procedimentos. Portanto, o que nos deve interessar é que os alunos desenvolvam as suas capacidades e não que acumulem fórmulas na sua cabeça que mais tarde não lhes farão sentido.

No entanto, se estarmos preocupados com o desenvolvimento das capacidades é muito importante, convém também estarmos despertos para a relutância que os alunos têm face à sua aprendizagem. Pelo que tenho observado ao longo dos anos, frases como "Eu não preciso de equações no meu dia-a-dia" ou "Para que é que servem expressões algébricas?!", são muito frequentes no discurso dos alunos e por isso temos também que ter presente a importância da Álgebra no desenvolvimento do aluno, Usiskin, (1999) diz-nos, por isso, que sem Álgebra, o aluno:

- Fica limitado na sua escolha de emprego ou até mesmo de algumas formações;
- Perde controlo de algumas coisas na sua vida e fica dependente de outros para a tomada de algumas decisões;
- Tem mais tendência a tomar decisões insensatas;
- Tem mais dificuldade em entender muitos dos assuntos abordados em Química, Física, Ciências da Natureza, Economia, Gestão, Psicologia, entre outras áreas.

A Álgebra é a linguagem da generalização. Se só vai fazer uma coisa uma vez, muito provavelmente não precisa de Álgebra. Mas se vai repetir um processo uma e outra vez, a Álgebra providencia-lhe uma linguagem simples para descrever o que está a fazer.

Usiskin (1999)

Ensino das equações

Foi já referida a importância da Álgebra, em geral, tanto no ensino da Matemática como no desenvolvimento dos próprios alunos. Dessa mesma forma, considerei inevitável explorar um pouco mais uma das suas componentes, as equações, para que possa depois fazer uma análise mais contextualizada do assunto em estudo: as equações de 2.º grau.

É de conhecimento geral que a Matemática foi evoluindo a par da evolução da humanidade e, da mesma forma, também o Ensino da Matemática foi alvo de inúmeras evoluções. Numa análise sobre a evolução dos manuais escolares em Portugal, Ponte (2004), conclui-se que a linguagem dos mesmos se tornou mais próxima dos alunos, isto é, menos formal bem como com o objetivo de tornar as equações um tema mais atrativo e compreensível. Esta preocupação deve-se muito à perceção de que a linguagem algébrica é muito difícil para os alunos e que a sua compreensão é, muitas vezes, disfarçada, como teremos oportunidade de verificar mais adiante. Obviamente, existem outros fatores para a mudança de rumo no ensino das equações mas, como futura professora, compreendo que a linguagem pouco provocadora de reflexão não contribui verdadeiramente para a compreensão da noção de equação, uma vez que chegar à solução de uma equação não significa necessariamente compreendê-la.

Tendo, por um lado, consciência de que entender a noção de equação é difícil, entendo também que compreender esta noção será muito importante para o desenvolvimento das capacidades do aluno, assim como definir equação de forma rigorosa junto dos alunos do Ensino Básico seria uma tarefa extremamente dolorosa tanto para os alunos como para o professor. Aliás, penso que posso afirmar que muitos de nós, professores de matemática, só compreendemos a definição de equação rigorosamente quando chegamos ao Ensino Superior. Portanto, como poderíamos esperar que os alunos a entendessem rigorosamente no 7º ano do Ensino Básico? Porém, nada disto é impeditivo de introduzir o conceito e a sua noção de forma mais intuitiva para que os alunos se apropriem do que significa resolver uma equação ou do significado da solução dessa mesma equação. Seria o mesmo que, servindo-me um pouco da gíria, começar a construir a casa pelas paredes ao invés de começar pelo telhado.

Segundo Lima & Tall (2006) o desenvolvimento do pensamento matemático pode dividir-se em três diferentes, mas interativas, formas de pensamento que nos levam a três diferentes mundos da Matemática:

- O mundo concetual-corporalizado das perceções, no qual cada um faz juízo das propriedades dos objetos matemáticos consoante aquilo que observa e verbaliza através de descrições.

- O mundo processual-concetual- simbólico, no qual as entidades matemáticas são vistas como símbolos e as ações são procedimentos vistos de uma forma mais flexível por alunos que tenham a capacidade de ver os símbolos tanto como um conceito como um processo.

- O mundo formal-axiomático baseado em axiomas, definições e teoremas que deduzem as estruturas matemáticas de axiomas e definições por um processo formal.

No caso da matemática escolar, os dois mundos mais frequentados são o mundo concetual-corporalizado e o processual-concetual, devido à necessidade de atribuição de significado aos símbolos e processos por parte dos alunos. É recorrente a utilização da imagem da balança para iniciar o tema das equações, para que os alunos reconheçam o equilíbrio que deve existir entre os membros da equação e percebam que, agora, o sinal de igual não lhes está a pedir uma resposta, como se verificava no cálculo das expressões numéricas, Kieran (1981). Ou seja, até aqui, os alunos sempre que viam o sinal de igualdade reconheciam-no como uma ação que teriam de completar: teriam que operar os termos da expressão consoante a operação que se apresentava e teriam que devolver um valor numérico ou, nas expressões algébricas, um polinómio reduzido e ordenado. Com as equações, os alunos têm que olhar para o sinal de igual como um ponto de equilíbrio que se deve manter e que lhes permite descobrir qual o valor que a incógnita terá de assumir para que a igualdade continue a ser verdadeira. Compreende-se assim, que a linguagem da balança seja um aliado muito importante na introdução deste tema junto dos alunos.

A linguagem da balança, sendo muito útil, possui também as suas limitações, e deixa de ser eficaz quando se tratam de valores negativos ou quando se começam a trabalhar com equações mais complexas, Lima & Tall (2010). Deste modo, os alunos e professores começam a utilizar outras formas de resolução de equações sendo que uma delas é a tática de "trocar de membro, trocar de sinal" ou "trocar de membro e pôr em baixo" , Tall, Lima & Healy (2014), que apesar de, quando bem executada, conduzir os alunos a resultados corretos, não os ajuda na compreensão da noção de equação, acabando por induzi-los em erro, provocando soluções erradas. Outra tática utilizada, sendo esta muito menos frequente, é "fazer a mesma coisa" nos dois membros da equação, o que permite que os alunos mantenham o "equilíbrio" que o sinal de igual traduz.

Ainda assim., apesar de todas as limitações de cada uma destas táticas de resoluções de equações, estas permitem ao aluno que se aproxime mais do significado de equação e dando ao professor o papel determinante de o conduzir nesta caminhada que, como sabemos, pode ser muito difícil e penosa para o aluno.

> *A manipulação de símbolos poderá ser melhorada se for baseada numa prática continuada com quantidades, contextualizadas de modo que os alunos possam desenvolver uma compreensão inicial dos significados e das utilizações das variáveis e uma capacidade de associar expressões simbólicas aos contextos dos problemas. Poder-se-á ainda melhorar a destreza na manipulação de expressões simbólicas se os alunos compreenderem a equivalência e adquirirem à vontade com a ordem das operações e com as propriedades distributiva, associativa e comutativa.*
>
> *Em NCTM (2008), p.268*

Por tudo isto é indispensável ter muito presente as dificuldades recorrentes nos nossos alunos na resolução de equações, devendo o professor estar alerta e prevenido para a sua ocorrência. A Tabela 2, ME (2007), apresenta alguns dos erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações de primeiro grau, sendo que a maior parte se adapta aos erros e dificuldades de qualquer tipo de equação:

Tabela 2 – Erros e diculdades dos alunos na resolução de equações do 1.º grau

Erro/Dificuldade	Exemplo	Autor
Adição de termos que não são semelhantes E Interpretação dos sinais "+" e "=" como indicadores de uma ação	3+4n=7n 2a+5b=7ab	Booth, 1984,1988 Kieran, 1981,1992 Küchermann,1981 MacGregor e Stacey,1997
Interpretação incorreta de monómios de 1º. grau	Interpretação de 4y como: - quatro "y's"; - um número com quatro dezenas e um número desconhecido de unidades;	Booth, 1984

	- 4+y por analogia com $3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$	
Uso de parêntesis	3(x+2)=7x ⟺3x+2=7x	Kieran, 1992 Socas, Machado, Palarea e Hernandez, 1996
Não saber como resolver uma equação		Kieran, 1985
Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número		Kieran, 1985
Adição incorreta de termos semelhantes	-2x+5x=8 ⟺7x=8	Kieran, 2006
Adição incorreta de termos não semelhantes	2x+5=x+8⟺7x=9	Kieran, 1985
Transposição incorreta de termos	16x-15=265 ⟺16x=265-215 30=x+7 ⟺30+7=x 3x+5=2x⟺3x=2x+5 7x=x+8 ⟺7-8=x+x	Kieran, 1985, 1992
Redistribuição (redistribution)	-2x+5=8 ⟺2x+5-5=8-5	Kieran, 1992
Eliminação	3x-3=2x-4 ⟺x=2x-4	Kieran, 1992
Conclusão incorreta da resolução da equação	6x=24⟺6+x=24 11x=9x= 11/9 2x=4⟺ i) x=4-2; ii) x= 4/(-2); iii)x=2/4; -x=-17⟺?? -x=4⟺??	Kieran, 1985, 1992 Lima e Tall, 2008 Vlassis, 2001

Ainda que a minha experiência não seja muito vasta, reconheço todas estas dificuldades nas resoluções dos alunos com que contatei. E, como já referi, é muito importante que o professor tenha presentes estas dificuldades e erros dos alunos durante a sua prática letiva e reflita sobre elas para que se evite que os procedimentos e símbolos surjam sem significado, o que tornará mais difícil a sua aprendizagem.

Ensino de equações de 2.º grau

Se o ensino das equações sofreu evoluções ao longo dos anos, é de esperar que o mesmo tenha sucedido no ensino das equações de 2.º grau. Partindo da análise feita por Ponte (2004) à evolução dos manuais escolares no que diz respeito às equações, foi depois realizada uma investigação tendo como objeto de estudo as equações de 2º. grau em sete manuais escolares ,Ponte et al (2007). Deste último concluí que tal como nas equações de 1.º grau, houve também uma preocupação em tornar o ensino das equações de 2.º grau mais atrativo e menos complexo e entendi que se notou uma maior preocupação com a compreensão e descodificação deste tipo de equações havendo menos preocupação com o domínio das técnicas de resolução. Percebi também que, ao longo do tempo, houve uma redução da quantidade dos assuntos abordados e um aumento da preocupação com a abordagem didática.

Todas as preocupações manifestadas anteriormente não identificam claramente a especificidade das equações de 2.º grau. As equações do 2.º grau além de todas as potencialidades algébricas e dificuldades identificadas nas equações em geral apresentam ainda algumas particularidades. É verdade que algumas se prendem com as dificuldades das equações em geral mas, no caso da equação de 2.º grau vão surgir dificuldades acrescidas.

Desta forma, considerei importante ler alguns estudos feitos sobre esta problemática, como é o caso do estudo "*Student's Attempts to Solve Two Elementary Quadratic Equations: A study in Three Nations*" ,Vaiavutjamai, Ellerton & Clements(2006), que trata da investigação de algumas questões específicas das equações de 2.º grau de alguns alunos da Tailândia, Brunei Darussalam e Estados Unidos da América. São, neste estudo, identificadas as seguintes dificuldades específicas das equações de 2.º grau:

1. Depois das aulas sobre equações de 2.º grau, muitos dos alunos revelam dificuldade em compreender a existência de duas soluções para a mesma equação.
2. Muitos dos alunos que resolveram as equações corretamente revelaram dificuldade em verificar a solução das mesmas, não compreendendo o que a solução representava na equação
3. A maioria dos alunos não compreendeu que uma mesma incógnita colocada diversas vezes na mesma equação representaria o mesmo valor

4. Ao tentar resolver a equação (x-3)(x-5)=0 alguns alunos optaram por transformar, em primeiro lugar, o primeiro termo num polinómio voltando depois a fatorizá-lo e aplicando posteriormente a lei do anulamento do produto.

É verdade que os alunos em causa terão realidades escolares possivelmente muito diferentes das nossas mas, pelo que tenho vindo a observar nos alunos do 3ºciclo e secundário que costumo acompanhar, estas são também as dificuldades dos alunos portugueses.

Ochoviet & Oktaç, (2009), identificam ainda três situações ligadas à Lei do Anulamento do Produto, donde apenas duas das quais fazem sentido apresentar aqui:

- Ao tentar resolver equações do tipo (ax+b)(cx+d)=0, os alunos tendem a usar a propriedade distributiva tentando depois aplicar os métodos de resolução de equações lineares ao invés de aplicarem a Lei do anulamento do Produto.
- Além de não sentirem necessidade de verificar as soluções obtidas, os alunos tendem a não entender que a existência de duas soluções não significa que na expressão inicial a incógnita assuma dois valores diferentes. Esta situação liga-se com o facto de os alunos verem a resolução de uma equação quadrática como duas equações lineares distintas.

A compreensão do conceito de variável, o desenvolvimento do pensamento algébrico e a relação entre os conceitos algébricos e outras propriedades matemáticas já estudadas justificam as dificuldades na aplicação da Lei do Anulamento do Produto na resolução de equações de 2.º grau e, talvez por isso, Ochoviet & Oktaç, (2009), sugerem que os professores de Matemática deverão enfatizar a compreensão do processo de resolução e não apenas a resolução mais eficaz.

Vaiyavutjamai & Clements, 2006, indicam-nos que o método de ensino tradicional (expositivo) promove a simples exposição de conceitos por parte do professor, tendo em vista a sua reprodução por parte dos alunos o que não promove a compreensão dos conceitos, como fui aprendendo ao longo do curso.

Como futura professora de matemática acho de extrema importância compreender de onde vêm estas dificuldades, pois só assim poderei tentar combatê-las e contrariá-las. Já tendo visto que a compreensão das equações é um tema muito sensível, verifiquei algumas particularidades das equações de 2.º grau que acrescem às dificuldades das equações apresentadas no Tabela 2, Vayavutjamai & Clements (2006) e Ochoviet & Oçtak (2009) apontam as seguintes questões:

- Muitos alunos não compreendem que os valores presentes na solução de uma equação são os valores que transformam a igualdade inicial numa igual dade verdadeira;
- O símbolo "=" tem significados diferentes, tanto pode representar uma indicação de ação (como no cálculo do valor de expressões numéricas, por exemplo) como, no caso das equações, representa, na verdade, um equilíbrio que se deve manter;
- Depois de aprenderem a resolver equações de primeiro grau, os alunos habituam-se a "pôr as letras no primeiro membro e os números no segundo", ao transporem este raciocínio para as equações de 2.º grau os alunos caiem no erro de operar com termos não semelhantes;
- Usar expressões menos rigorosas como "só podemos somar os xx's do mesmo tipo", quando na verdade o que quer dizer é adicionar monómios com incógnita de graus diferentes
- É difícil para os alunos entenderem que um polinómio e a sua fatorização são expressões equivalentes, ou seja, são interpretações diferentes de uma mesma estrutura;
- A lei do anulamento do produto é vista como um processo e não é, na verdade compreendida, o que faz com que os alunos não identifiquem uma equação do tipo $(x-a)(x-b)=0$ como uma equação e tenham, assim, necessidade de transformar a fatorização num polinómio;
- Regras como "troca de membro, troca de sinal", "se está a dividir, passa para o outro lado a multiplicar", "tem de se fazer a operação inversa", não privilegiam a compreensão e levam à mecanização dos procedimentos;
- As regras do ponto anterior podem levar também a falhas como o desrespeito das prioridades das operações;
- Apresentar regras algébricas antes de os alunos precisarem delas, faz com que a memorização se destaque na aprendizagem dos alunos. Se, por outro lado, as regras surgirem da necessidade dos alunos resolverem um problema, é muito mais provável que os alunos descubram a regra por si e, por isso, se apropriem dela sem ter de a memorizar.

Assim, é muito importante que o professor esteja atento e que olhe para as equações de 2.º grau como um assunto de difícil aprendizagem. É preciso ser sensível a estas dificuldades e sobretudo não nos esquecermos que a riqueza da álgebra está nos raciocínios que desenvolve e não na acumulação de procedimentos memorizados sem sentido ou significado.

> *Quando se aposta demasiado no domínio de capacidades técnicas, está-se a sacrificar a compreensão e construção do conhecimento concetual.*
>
> *Vayavutjamai & Clements (2006) p.52*

Até porque depois de apropriados, os processos e algoritmos criados pelos alunos, são de difícil reversão além de que depois de aprendido o método é muito mais difícil de criar a necessidade de compreensão dos conceitos, Vayavutjamai & Clements (2006).

3 - Unidade de ensino

A minha intervenção letiva insere-se no tema da Álgebra, mais especificamente no tópico das Equações do 8º ano e no subtópico das equações de 2.º grau incompletas a uma incógnita e das equações de 2.º grau completas que verificam casos notáveis. Este tópico sucede às Operações com polinómios, dando-lhe continuidade e, desta forma, terminando o tópico das Equações do 8º ano.

Considerando isto, estabeleci como objetivos de aprendizagem desta unidade os mesmos que o Programa de Matemática do Ensino Básico estipula para o tema da Álgebra:

- Interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;
- Comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos;
- Resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.

Mas também objetivos mais específicos das equações das equações de 2.º grau:

- Resolver equações de 2.º grau a uma incógnita:
- Resolver problemas envolvendo equações de 2.º grau

É ainda importante referir que a minha preocupação não se prende apenas com a aprendizagem que os alunos possam fazer das técnicas de resolução das equações de 2.º grau em causa, mas também com a compreensão destas e do seu significado.

Contexto Escolar

A escola. O presente estudo desenvolveu-se na Escola Secundária Padre Alberto Neto, em Queluz. Esta escola é a escola sede do Agrupamento de Queluz Belas, um dos maiores do país, do qual fazem parte as seguintes escolas:

- Jardim de Infância Belas 1
- Jardim de Infância Serra da Silveirinha
- Escola Básica Belas 1
- Escola Básica Belas 2
- Escola Básica Belas 3
- Escola Básica Belas 5
- Escola Básica Mário Cunha Brito
- Escola Básica Pendão
- Escola Básica Penho Longo
- Escola Básica Queluz 2
- Escola Básica do 2.º e 3.º Ciclo Prof. Galopim de Carvalho
- Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto

Tendo sido remodelada há poucos anos, a sua estrutura física oferece óptimas condições, o que lhe permite disponibilizar todos os níveis de ensino do 5.º ao 12.º ano de escolaridade, assim como um conjunto variado de cursos profissionais.

Situa-se no concelho da Amadora, distrito de Lisboa, um concelho vastamente povoado, que possui uma elevada heterogeneidade a nível cultural e social e que está inserido num meio sócio-económico médio baixo. Esta heterogeneidade é absorvida pela escola o que provoca uma grande diferença social e cultural entre os seus alunos.

A turma. A turma C do 8º ano da Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto é uma turma que tal como todas as outras, apresenta algumas particularidades. É constituída por 25 alunos sendo 15 deles do sexo feminino A idade dos alunos varia entre os 13 e 15 anos de idade, sendo que dezassete alunos têm 13 anos, oito alunos têm 14 e uma aluna tem 15 anos, sendo a sua média de idades 13,4 anos.

Tendo sido formada no ano letivo passado, a turma sofreu algumas alterações, visto que saíram alguns alunos e entraram 6 novas alunas, uma das quais vinda da Suíça no final do mês de Novembro e tendo regressado no final do 2º. período. A turma tem alguns alunos repetentes e outros que apesar de não serem repetentes este ano, reprovaram no 7º ano de escolaridade. Existem ainda três alunos com necessidades educativas especiais.

Esta turma é especialmente heterogénea no que diz respeito ao aproveitamento pois, apesar da maior parte dos alunos ter um aproveitamento satisfatório, existem alunos com aproveitamento muito acima da média (dois alunos fazem parte do Quadro de Honra da escola) e outros alunos com aproveitamento muito fraco. Podemos verificar, através do Gráfico 1, que a percentagem de alunos com classificação negativa é elevada. No entanto, apesar de tudo, no último período alguns alunos conseguiram atingir o nível 3 e é também positivo verificar que o número de alunos com nível 4 também aumentou. É também importante referir que alguns alunos tinham dificuldades muitíssimo elevadas, o que comprova a elevada heterogeneidade destes alunos, no que diz respeito à disciplina de matemática.

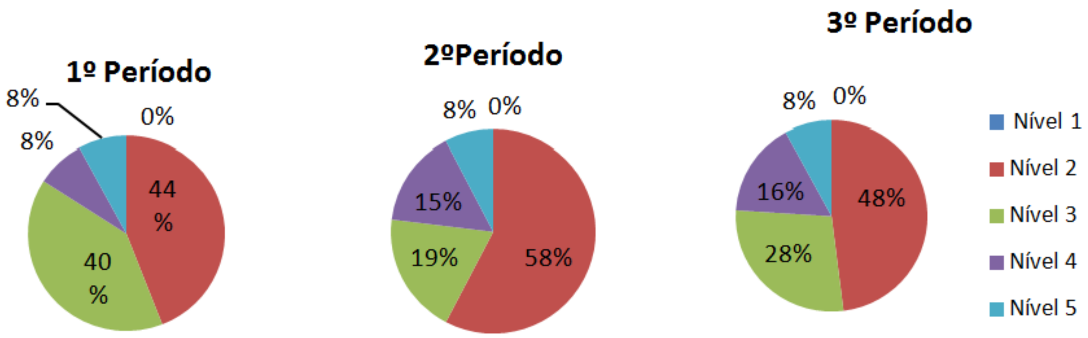


Ilustração 1 - Classificações a matemática ao longo do ano

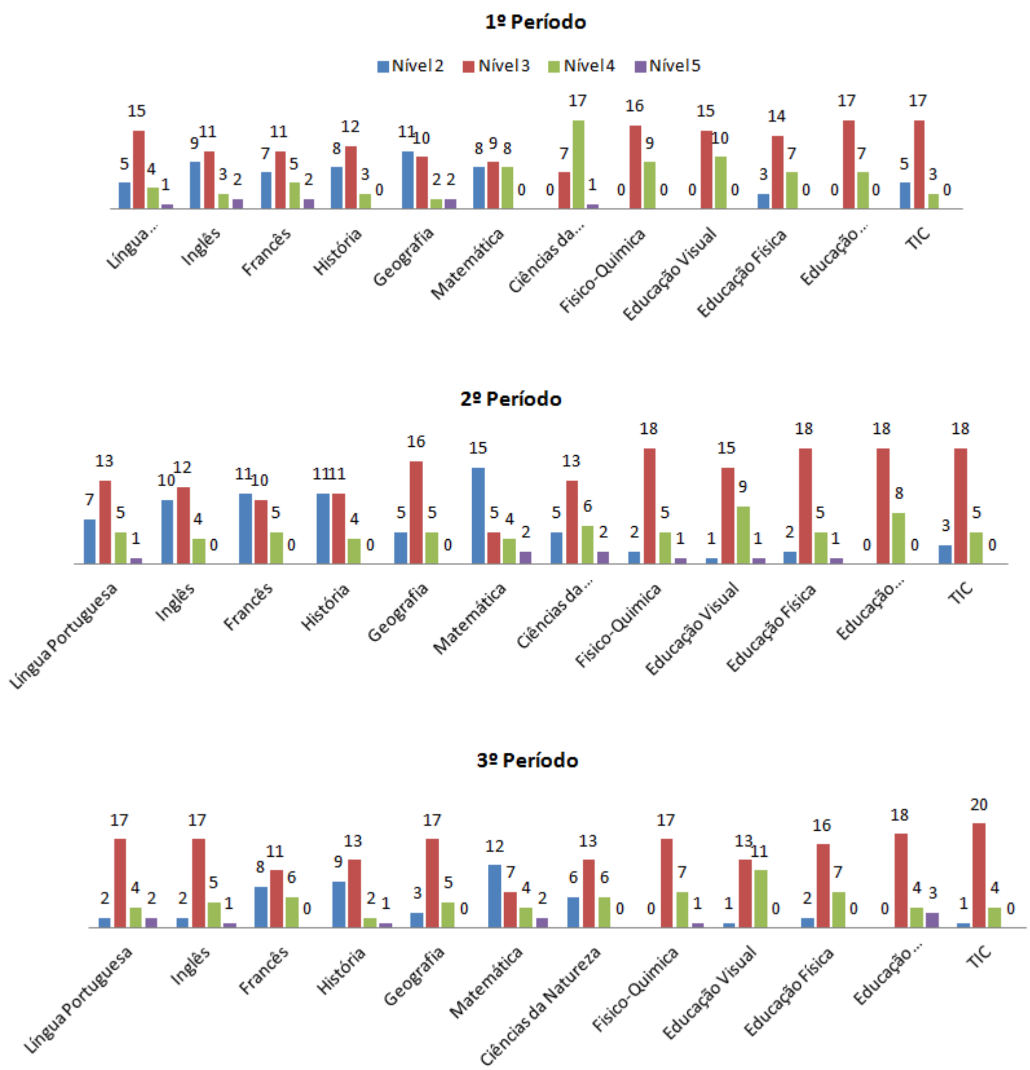


Ilustração 2 - Classificações dos alunos por disciplina nos três períodos letivos

A tendência verificada em Matemática não se verifica, no entanto, nas outras disciplinas. Como podemos verificar no Gráfico 2, a maioria dos alunos concentra-se no nível 3 nas restantes disciplinas. É também curioso verificar que as notas de Matemática não se assemelham às de Físico-Química, como seria usual pensar. O que pode indicar que mesmo utilizando recursos matemáticos, o facto de que na Físico-Química os alunos estarem envoltos num contexto pode facilitar a aprendizagem.

No que diz respeito ao comportamento durante as aulas, os alunos são irrequietos e um pouco barulhentos mas também muito participativos e interessados; é muito frequente a intervenção de uma boa parte dos alunos e o surgimento de questões muito interessantes. Mesmo sendo uma turma com algumas dificuldades na aprendizagem da Matemática, estes alunos não têm receio de participar e contribuem com momentos muito pertinentes ao longo das aulas. É frequente a partilha de comentários entre eles sobre os assuntos que estão a ser abordados em aula. É também muito interessante verificar que, nesta turma, os alunos com mais facilidade são alunos muito completos ou seja, além de compreenderem, explicam também com muita facilidade e boa vontade aos seus colegas. Aliás, muitos dos momentos 'brilhantes' das aulas foram protagonizados por alunos enquanto apresentavam aos seus colegas as suas interpretações/explicações de tarefas ou raciocínios.

Estratégias de Ensino

Estando os alunos habituados a trabalhar e a aprender com tarefas de natureza exploratória optei, naturalmente, por tarefas desta tipologia. Além da vantagem de já estarem habituados a tarefas desta natureza, há ainda evidência de que a aprendizagem dos alunos é muito favorecida através deste tipo de tarefas, pois, como já referi anteriormente, a Álgebra é uma área da matemática de natureza muito abstrata, que traz muita dificuldade aos alunos. Durante muitos anos foi ensinada recorrendo a algoritmos e processos de repetição que não favoreceram, de todo, a compreensão do que é, na verdade, a Álgebra. Aceita-se e admite-se agora que aprender Álgebra implica mais do que repetir algoritmos e processos, aprender Álgebra é um processo muito longo e moroso que além da repetição envolve compreensão, representação, modelação e análise de conceitos e relações. Como tal, introduzir tarefas, sendo elas exercícios ou problemas, de natureza exploratória, dará a oportunidade aos alunos de eles próprios construírem e darem significado ao seu conhecimento.

É verdade que não será um método infalível que conseguirá levar todos os alunos a dominá-la na perfeição, no entanto, acredito que trará muito benefício à aprendizagem dos alunos e que sobrevalorizará os processos de compreensão face aos processos de mecanização/memorização.

Nesse sentido, atribuí tarefas de natureza exploratória na forma de problemas e exercícios para que os alunos compreendessem os processos de fatorização de polinómios assim como as estratégias utilizadas para resolver uma equação de 2.º grau. Além disso, tentei orientar as tarefas para que os alunos percebessem o que significa encontrar uma solução de uma equação de 2.º grau e o seu significado e o que significa resolver uma equação de 2.º grau e os processos envolvidos.

Os alunos trabalharam a pares, como já é hábito para eles, visto que desde o início do ano letivo trabalham em díades escolhidas pelo professor, tendo em conta as características e avaliações de cada aluno. Estas díades são mudadas ao longo do ano sempre a seguir a cada teste de avaliação.

Os momentos de trabalho autónomo foram intercalados com momentos de discussão coletiva. Tentei que o meu papel fosse, além de apresentação e esclarecimento do enunciado da tarefa, acompanhar o raciocínio dos alunos, durante o trabalho autónomo dos mesmos, esclarecer algumas dúvidas que possam surgir, registando-as, assim como as estratégias de resolução dos alunos para que durante a discussão coletiva pudesse conduzir com mais clareza e assertividade a aprendizagem dos alunos e pudesse também avaliar as suas aprendizagens com mais coerência.

Conceitos matemáticos

Ao longo deste ano de trabalho, percebi a importância que a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos numa aula de matemática tem. Todos percebemos, enquanto antigos alunos do ensino básico e secundário, quão importante era os professores dominarem os conceitos para que os alunos tivessem sucesso. A verdade é que percebi que o domínio dos conceitos não é suficiente. Enquanto professores, temos de refletir sobre estes e perceber de que forma poderemos ajudar os alunos a compreende-los verdadeiramente. Afinal não queremos alunos que saibam enunciar propriedades, definições ou teoremas na perfeição sem que os compreendam. Como tal, optei por rever os conceitos matemáticos envolvidos nas aulas não apenas do ponto de vista superior mas também do ponto de vista dos alunos. Para tal, fiz recurso do livro Compêndio de Álgebra de Sebastião e Silva e Silva Paulo, editado em 1958.

Começo então por refletir sobre o que é a Álgebra pois esta é uma das áreas da matemática que mais estranheza causa aos alunos. Aliás, arrisco a dizer que muitos professores de matemática já ouviram os alunos dizer pelo menos uma vez: "Se matemática são números, o que estão aqui as letras a fazer?!". Podia afirmar que aprender álgebra é aprender a resolver equações, aprender a manipular letras. Mas não concordo. Fazer álgebra é sobretudo trabalhar com a generalização e este exercício de generalização não é fácil. Há que lembrar que foram precisos vários génios matemáticos para chegar à álgebra atual e não podemos exigir que os nossos alunos percorram, em apenas 12 anos, um caminho que grandes génios da matemática levaram séculos a percorrer. É necessário ajudá-los a percorrer este caminho tentando sempre dar sentido ao que estão a aprender, recorrendo a todos os meios ao nosso alcance.

Dentro deste espírito, estando o meu tema centrado nas equações de 2.º grau, achei importante apresentar uma definição de equação:

Definição 1 – **Equação** é toda a <u>igualdade</u> cujos <u>membros</u> contêm uma ou mais <u>variáveis</u>, que recebem o nome de incógnitas, atendendo que representam quantidades desconhecidas.

Tentando pensar como um aluno sublinhei as palavras que me poderiam ter causado alguma dúvida. O que quer a definição dizer com igualdade, membros e variáveis?

Comecemos pela definição de variável:

Definição 2 - **Variável** numérica é todo o símbolo que, numa determinada expressão matemática, pode ter como valor qualquer número pertencente a uma classe de números indicada (por exemplo: números naturais, reais, complexos,…).

E igualdade, o que quer a Definição 1, dizer com igualdade?

Definição 3 – Dois símbolos ae b dizem-se **iguais** se a e b representam um mesmo número, escreve-se a=b, o que representa a **igualdade** entre a e b.

Esta é a definição de igualdade que os alunos têm presente e que, regra geral, não lhes causa estranheza devido ao seu uso continuado desde o primeiro ciclo. Adaptando então a definição ao que se espera de alunos do 3.º ciclo podemos então dizer:

Definição 4 – **Igualdade** é toda a fórmula que se obtém ligando pelo sinal “=” duas expressões, que se dizem **membros** da igualdade: primeiro membro o que fica à esquerda e o segundo membro o que fica à direita.

Então uma equação é uma igualdade em que pelo menos um dos membros é uma expressão composta por números, letras e sinais operatórios.
Assim sendo, para que a igualdade seja verdadeira, estas letras não podem assumir um valor qualquer representando quantidades desconhecidas que se pretendem encontrar para que, ao serem substituídas na igualdade inicial ou numa sua equivalente, transformem a igualdade numa igualdade verdadeira. E daí as variáveis passam a ter o nome de **incógnitas**. Resolver uma equação é encontrar qual ou quais o(s) número(s) que, como valor(es) atribuídos à incógnita, transformem a equação numa igualdade numérica verdadeira. Vemos então que a resolução de uma equação leva a considerar equações equivalentes entre si. Ou seja, equações que sendo diferentes têm as mesmas raízes ou soluções:

Definição 5- Uma equação diz-se **equivalente** a uma outra, quando toda a raiz (solução) da primeira é raiz (solução) da outra e reciprocamente ou quando são ambas impossíveis.

Para que se obtenham equações equivalentes, de forma resolver a equação, é necessário que se recorram aos seguintes princípios de equivalência:

1.º Princípio de equivalência: Substituindo um dos membros duma equação por uma expressão equivalente a esse membro, obtém-se uma equação equivalente à primeira.

2.º Princípio de equivalência: Quando um dos membros de uma equação é a soma de duas ou mais expressões, obtém-se uma equação equivalente à primeira, passando para o outro membro uma qualquer dessas expressões com o sinal trocado.

3.º Princípio de equivalência: Multiplicando ambos os membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obtém-se uma equação equivalente à primeira.

É importante que tanto o professor tenha presente a importância da compreensão destas definições e princípios, o que certamente contribuirá para a compreensão por parte dos alunos. Não basta que os alunos os vejam como meras regras, é importante que os alunos compreendam estes princípios para que não comprometam a sua aprendizagem, desrespeitando os conceitos envolvidos. De outra forma, sabemos que resolver uma equação implica seguir determinados procedimentos, no entanto é importante que os alunos compreendam que estes procedimentos devem obedecer a estes princípios de equivalência e outras regras, caso contrário, o processo de resolução da equação e a sua compreensão ficam comprometidos.

Entenda-se ainda que, no âmbito do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, estes princípios de equivalência são aplicados apenas caso estejamos perante uma equação polinomial.

Definição 6 - **Equação polinomial** numa incógnita é uma equação, cujos membros são compostos apenas por polinómios, que através da aplicação dos princípios de equivalência se pode reduzir à forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0, a_n \neq 0 \text{ ou } \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$

Onde x é a incógnita, o número que n representa é o grau da equação e os números que a_k representam os coeficientes dos vários termos do polinómio. A esta forma chamamos forma canónica da equação polinomial. Uma equação polinomial de grau um diz-se uma equação linear. Recorrendo ao Teorema Fundamental da Álgebra (Anexo XIII) podemos ainda afirmar que uma equação polinomial de grau n pode ter até n raízes (soluções).

Sendo o meu trabalho centrado nas equações de 2.º grau considerei importante apresentar uma definição deste tipo de equações:

Definição 7- **Equação do 2.º grau** numa incógnita *x* é toda a equação que, pela aplicação dos princípios de equivalência se possa reduzir à forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sendo a, b e c (coeficientes) números quaisquer com a≠0. À forma acima apresentada chamamos usualmente forma canónica da equação de 2.º grau. Uma equação de 2.º grau pode ter até duas soluções.

Podemos pensar que a existência de duas soluções é fácil de compreender para os alunos, mas nem sempre isto é verdade. É, por isso, muito importante criar situações junto dos alunos em que estes se confrontem com a existência de uma, duas ou nenhuma soluções para uma só equação e da mesma forma que sejam confrontados com a verificação destas soluções. Compreendendo assim que, independentemente da quantidade de valores que a solução assume, ao substituirmos a incógnita por eles, a igualdade inicial passa a ser uma identidade.

É importante, além da compreensão das definições e princípios de equivalência, que os alunos compreendam o que significa resolver uma equação e os processos aqui envolvidos, neste caso na resolução das equações de 2.º grau. Sabemos que no 9.º ano de escolaridade os alunos aprendem a fórmula resolvente da equação geral de 2.º grau. No entanto, no 8.º ano, não tendo conhecimento desta fórmula, os alunos aprendem apenas as equações de 2.º grau do tipo:

(1) $ax^2 - c = 0$, a≠0
(2) $ax^2 - bx = 0$, a,b≠0
(3) $(ax)^2 \pm 2abx + b^2 = 0$, a,b≠0

Para resolvermos as equações do tipo (1) baseamo-nos num método muito próximo do método de resolução de uma equação linear, ou seja, isolar a incógnita num dos membros da equação com a diferença de que, nas equações de 2.º grau, os alunos terão de recorrer a processos de radiciação para determinar o valor da incógnita. De outra forma, os alunos neste tipo de equação de 2.º grau, devem isolar a incógnita num dos membros e depois determinar os valores cujo quadrado é $\frac{c}{a}$.

Nas equações do tipo (2) e (3), facilmente os alunos percebem que isolar a incógnita no primeiro membro não é útil. Devem então transformar a equação numa sua equivalente que se apresente na forma canónica e de seguida deverão fatorizar o primeiro membro da equação, para que depois possam recorrer à lei do anulamento do produto para encontrar as soluções. Devemos por isso refletir sobre o que é fatorizar um polinómio e em que consiste a lei do anulamento do produto. Por fatorização de polinómios de 2.º grau entende-se o processo que consiste em escrever um polinómio de 2.º grau na forma de um produto de fatores constituídos por polinómios de grau um. Assim, consoante o tipo de equação de 2.º grau em questão será:

Tipo (2): $ax^2 - bx = x(ax - b)$

Tipo (3): $(ax)^2 + 2abx + b^2 = (ax + b)(ax + b)$, ou

$$(ax)^2 - 2abx + b^2 = (ax - b)(ax - b)$$

Estando o primeiro membro da equação fatorizado e o segundo membro igual a zero, recorre-se à **lei do anulamento do produto**: se o produto de dois ou mais números é zero, um desses números, pelo menos, é zero.

Sequência de Tarefas

Como já referi, estes alunos estão muito habituados a trabalhar com tarefas de natureza exploratória. Assim sendo, estas fichas de trabalho que apresento foram criadas tendo como base esse tipo de ensino. Houve também intenção nestas tarefas de criar uma sequência que permitisse a aprendizagem destes tópicos da forma mais natural possível.

Primeiro considerei importante dar continuidade à abordagem geométrica com que os alunos introduziram as operações com polinómios, pois penso ser uma forma de dar sentido aos símbolos que a álgebra necessita, tornando menos difícil a sua compreensão.

> *Quando combinamos pensamento algébrico e pensamento geométrico, obtemos diferentes interpretações do que será a sua prova. Por um lado, a demonstração geométrica pode mostrar porque é que um argumento algébrico funciona, por outro, uma formulação algébrica de uma demonstração geométrica pode revelar padrões formais que correspondem aos padrões geométricos.*
>
> Banchoff (2008)

Além de que deve ser sempre tido em conta tanto os conhecimentos anteriores dos alunos bem como as suas experiências, NCTM (2008). Não faz, para mim, sentido que, depois de terem aprendido as operações com polinómios (tópico anterior) recorrendo a uma abordagem geométrica se aborde a fatorização de polinómios (que não é mais do que uma outra operação possível com polinómios) com outro tipo de abordagem.

Após esta abordagem inicial geométrica, as tarefas vão gradualmente largando a geometria e tomando uma forma somente algébrica para que os alunos, após darem significado aos símbolos algébricos, consigam manipulá-los e compreendê-los já sem a ‘bengala’ da geometria, mas sempre que necessário a geometria foi ‘chamada a intervir’ de forma a facilitar a compreensão dos alunos.

Por fim, as equações de 2.º grau serão introduzidas através de *problemas de palavras* para que, mais uma vez, os alunos deem significado à álgebra envolvida.

Foi também uma preocupação constante que as tarefas realizadas tivessem uma linguagem clara e simples para que os alunos se apropriassem das tarefas com mais facilidade. Além disso as tarefas foram também concebidas para que a sua apresentação no quadro fizesse uso das várias cores disponíveis para que os alunos relacionassem os vários conceitos.

Polinómios e fatorização (Ficha nº 1). Este tópico foi trabalhado recorrendo à ficha nº 1 (Anexo VII) Esta ficha é composta por uma única tarefa: encontrar uma expressão para a área de cada um dos retângulos decompostos.

O meu objetivo é que os alunos relacionem as várias expressões possíveis e que as identifiquem como equivalentes; que aprendam o processo de 'pôr um fator em evidência' e que lhe deem significado através da geometria; que tomem contacto com o processo de fatorização recorrendo a casos notáveis da multiplicação e que comecem a apropriar-se da linguagem que terão que utilizar nas aulas seguintes.

É, de facto, uma ficha simples mas que serve o objetivo de introduzir a fatorização de polinómios aproveitando a geometria e de dar a entender aos alunos que é tão importante transformar uma expressão num polinómio como transformar o polinómio numa expressão fatorizada e, mais importante ainda, que estas duas expressões são equivalentes.

Fatorização: fator em evidência e casos notáveis (Ficha nº 2). Pretendi que este tópico fosse abordado ainda recorrendo à geometria no entanto, foi meu objetivo que os alunos abandonassem a geometria lentamente e que começassem a reconhecer e dominar os processos puramente algébricos. Como tal, a ficha (Anexo VIII) foi construída para que se pudessem revisitar os conceitos da aula anterior de um ponto de vista mais algébrico do que geométrico.

Esta ficha (é composta por duas tarefas. A primeira tarefa consiste em pedir aos alunos que estes façam a correspondência entre as figuras e as expressões algébricas das suas áreas. Esta tarefa pretende que os alunos utilizem a propriedade distributiva da multiplicação para identificar qual das expressões corresponde e que depois, relacionem esse polinómio com a mesma expressão fatorizada que resulta da expressão da área das figuras.

Apesar de, na ficha, os alunos terem acesso à figura, durante a discussão/correção, no quadro os alunos devem ter apenas as representações das expressões algébricas para que comecem a manipular as expressões algébricas com mais naturalidade. É também objetivo desta tarefa que os alunos reconheçam os processos de fatorização e os identifiquem: pôr um fator em evidência e utilização de casos notáveis. É importante que o professor introduza os termos corretos durante a tarefa pois sendo uma tarefa inicial, os alunos estarão mais recetivos a novas terminologias.

A segunda tarefa, consiste na apresentação de três factorizações de polinómios, duas delas erradas, para que os alunos identifiquem os seus erros e proponham, eles próprios uma resolução correta. Esta tarefa tem o objetivo de, através da verificação de erros, os alunos visitarem os seus erros mais comuns. Pois, como fomos vendo ao longo do mestrado, o processo inverso, ou seja, olhar para um exercício resolvido e detetar os seus erros promove a aprendizagem em larga escala. É também uma tarefa puramente algébrica, para que os alunos testem a sua capacidade de manipulação e compreensão de símbolos.

Pretende-se que, no final, os alunos aprendam os dois processos de fatorização referidos e que reconheçam a equivalência entre um polinómio e a sua fatorização, assim como utilizem a terminologia correta, para evitar confusões futuras.

Lei do anulamento do produto (Ficha nº 3). Para que se introduzisse a lei do anulamento do produto achei importante construir uma ficha de trabalho em que os alunos pudessem, de forma intuitiva, percebê-la.

Esta ficha (Anexo IX) é composta por duas tarefas, uma apresentada inicialmente e outra que surge como tarefa extra.

A primeira tarefa consiste em apresentar problemas de palavras de contexto puramente matemático. Sendo estes apresentados com o objetivo de introduzir a Lei do Anulamento do Produto ao mesmo tempo que os alunos vão trabalhando a noção intuitiva de equação.

Optei por escolher uma tarefa deste tipo na esperança que os alunos se apercebam do que acontece na Lei do Anulamento do Produto sem que esta fosse enunciada, pois, como já se viu anteriormente, um dos problemas da álgebra é apresentar as suas regras, leis e raciocínios como se de simples fórmulas se tratassem; além de que a Lei do Anulamento do Produto, apesar de aparente fácil aplicação, é de difícil compreensão.

A segunda tarefa inicia-se com a primeira pergunta extra que pretende questionar e levar os alunos à conclusão de que “ para que o produto de dois ou mais fatores seja zero, basta que um deles seja zero”. Continua depois com problemas do tipo da primeira tarefa sendo que agora os alunos são indicados a apresentar primeiro uma equação que represente o problema em causa e depois a resolvê-la, as equações que irão aparecer serão todas incompletas para que tenham que usar técnicas de fatorização e a lei do anulamento do produto para acharem a sua solução.

Equações de 2º grau (Ficha nº 4). Após as três primeiras fichas de trabalho, pretende-se que os alunos já consigam compreender e dominar algumas das técnicas necessárias à resolução de equações de 2.º grau. Como tal, a quarta ficha de trabalho dos alunos foi construída para que os alunos comecem finalmente a abordar as equações de uma forma puramente algébrica.

Esta ficha de trabalho (Anexo X) está dividida em três tarefas. A primeira consiste na apresentação de três resoluções de uma mesma equação por três alunos diferentes. Esta tarefa foi adaptada de uma tarefa presente no manual adotado. Pretende-se que os alunos identifiquem qual das resoluções é a resolução certa e que justifiquem a sua escolha identificando os erros que as resoluções erradas apresentam. Foi meu objetivo, com esta tarefa, fazer com que os alunos se questionassem sobre as manipulações algébricas e que tomassem contacto com alguns dos erros mais frequentes na resolução de equações de 2.º grau.

A segunda tarefa é um exercício em que os alunos têm de completar resoluções de equações com termos em branco, de forma a produzir resoluções de equações coerentes e corretas. Foi também uma preocupação minha, na escolha dos exemplos, apresentar equações incompletas dos diferentes tipos $(ax^2 + bx;\ ax^2 + c)$ e uma equação completa, para que os alunos se pudessem familiarizar com os tipos de equações de 2.º grau que devem dominar no final do 8º ano de escolaridade.

A terceira tarefa é um exercício de aplicação. Consciente de que os alunos terão, ao longo do seu percurso escolar, de saber reconhecer e resolver equações de 2.º grau, optei por incluir um exercício de aplicação livre de contexto, puramente algébrico e tradicional. Apesar do tradicionalismo, houve uma preocupação na escolha das equações em causa e a sua apresentação visual foi também pensada de forma a que na primeira coluna figurassem equações de 2.º grau do tipo ax^2+c, na segunda coluna figurassem equações de 2.º grau do tipo ax^2+bx e na terceira coluna equações de 2.º grau completas para as quais a sua resolução envolvia o uso de casos notáveis. A terceira tarefa inclui ainda três equações extra, uma de cada tipo, que servem o mesmo propósito das anteriores, no entanto, a decisão de não as apresentar diretamente na ficha foi motivada por questões visuais (pretendia que a ficha tivesse um aspeto pouco pesado, uma vez que isso poderia desmotivar os alunos) e por questões de gestão de tempo.

Problemas envolvendo equações de 2º grau (Ficha nº5). É verdade que algumas das tarefas apresentadas nas fichas de trabalho anteriores já têm um caráter problemático, no entanto, considerei que seria importante apresentar aos alunos uma ficha de trabalho constituída apenas por tarefas de resolução de problemas. A última ficha de trabalho (Anexo XI) está dividida em três tarefas, sendo que a única coisa que une as três é o carácter problemático das tarefas.

A primeira tarefa é constituída por vários problemas em que, ao invés de acharem a solução de uma equação como até aqui estavam habituados, os alunos terão de escrever uma equação cujo conjunto solução é o que lhes é apresentado. Ao longo do curso falámos várias vezes da importância destas tarefas que fazem o caminho inverso ao que os alunos estão habituados, este tipo de tarefas permite aos alunos estimular outro tipo de raciocínios e muitas vezes dá-lhes uma perspetiva diferente sobre os conceitos, o que pode ser muito útil na sua aprendizagem.

A segunda tarefa consiste numa pequena visita à geometria, os alunos têm que relacionar os perímetros das duas figuras dadas. Apesar dos elementos geométricos presentes, pouco ou nada os alunos podem retirar da geometria para os auxiliar na resolução do que lhes é pedido, os alunos terão no entanto a vantagem de poderem abordar a tarefa sem se confrontarem de imediato com o "peso" da álgebra, podendo favorecer a motivação na sua resolução.

A terceira tarefa foi redigida para que se tornasse um problema com sentido e mais rico em contexto. Nesta tarefa os alunos têm de interpretar a informação dada no enunciado de forma a descobrir o que lhes é pedido. Ao descodificarem o enunciado, pretende-se que os alunos identifiquem as medidas desconhecidas como incógnitas e que façam uso de equações de 2.º grau para resolver o problema proposto. Interpretando depois as soluções e dando-lhes significado no contexto do problema.

Avaliação das aprendizagens

> *A avaliação não constitui uma componente isolada e dissociada de todo o processo educativo, mas acima de tudo ela é uma parte inseparável de um complexo sistema onde o fim último do acto educativo é a aprendizagem.*
>
> *Santos, 2008*

Desde o momento que entrámos para a escola todos nós percebemos que a avaliação fazia parte da nossa aprendizagem. Aprender sem ser avaliado não faz sentido. Como poderemos saber em que estado está a nossa aprendizagem se uma avaliação não é feita? No entanto, o conceito de avaliação foi sempre confundido com classificação. Ser avaliado a uma disciplina significava ter uma nota dentro de uma certa escala e, para muitos, ainda é. Desta forma, cabe ao professor, mudar esta mentalidade e insistir, cada vez mais, numa avaliação promotora de aprendizagem, ou seja, uma avaliação formativa.

Abrecht, em Santos (2008), diz-nos que a avaliação formativa deve:

- Dirigir-se ao aluno;
- Procurar uma reflexão sobre a aprendizagem pelo aluno;
- Fazer parte da aprendizagem;
- Procurar uma adaptação a uma situação individual, devendo respeitar a pluralidade e a diversidade;
- Focar-se tanto nos resultados como nos processos;
- Agir e intervir sobre a aprendizagem e/ou sobre o ensino, não se limitando a observar:
- Procurar razões que dão sentido às dificuldades, em vez de as sancionar;
- Dirigir-se também ao professor para o orientar na sua prática letiva.

Assim se vê que a avaliação será muito importante para a aprendizagem e, como tal, deve ser inserida na rotina de sala de aula e deve fazer parte do dia-a-dia dos alunos, NCTM (2008), além das formas de avaliação formal, os professores deverão incluir na avaliação outros elementos menos formais como questões em aula, projetos, registos escritos, portefólios, entre outros elementos. No que diz respeito à Matemática, a avaliação deverá dar possibilidade ao professor de saber se os seus alunos são capazes de fazer matemática, além da sua habilidade com os procedimentos, NCTM (2008). Portanto devem-se verificar as seguintes normas relativas a uma avaliação exemplar da matemática, sugeridas pelo NCTM, em 1995, nas normas para a avaliação escolar. A avaliação deve:

- Refletir a matemática que os alunos devem saber e ser capazes de fazer;
- Melhorar a aprendizagem da matemática;
- Promover equidade;
- Ser um processo transparente;
- Promover inferência válidas;
- Ser um processo coerente.

Em NCTM (2008)

Partindo da noção de avaliação formativa atrás, tentei, durante a minha prática, concretizá-la. Refleti sobre que informação poderia ser útil e de que modo poderia recolhê-la, de forma a apoiar-me nas inferências sobre as aprendizagens dos alunos e na interpretação das situações em que revelaram mais dificuldades. Optei por recolher os seguintes elementos de avaliação:

❖ <u>Registos escritos das aulas</u>

Estes consistem no registo escrito das intervenções dos alunos e da professora, assim como da apresentação do quadro, transcritos pela minha colega de estágio, Andreia, durante as minhas aulas.

Estes registos permitem-me revisitar a sala de aula e refletir sobre as intervenções dos alunos, como já vimos, estas intervenções serão muito úteis na avaliação dos mesmos. Assim, conseguirei analisar com mais facilidade quais os conceitos em que os alunos tiveram mais dificuldade.

Este não é um método de avaliação a que possa recorrer com regularidade na minha futura vida profissional, mas não quis deixar de aproveitar a presença de outras pessoas em aula e tirar daí uma vantagem.

❖ <u>Registos dos alunos</u>

Em todas as aulas foram recolhidas as fichas de trabalho dos alunos para serem fotocopiadas. Desta forma, pude avaliar o trabalho feito em aula pelos alunos e os seus processos de resolução.

❖ <u>Mini-teste</u>

O mini-teste foi preparado tendo em conta o que foi feito durante as aulas com os alunos, assim optei por não introduzir problemas com equações devido à proximidade das aulas em que este assunto seria abordado e a realização do mini-teste.

Além de servir de elemento de classificação, o mini-teste serve sobretudo o propósito de avaliação tanto da parte do professor como da parte dos alunos, uma vez que estes serão confrontados com as suas dificuldades.

Assim sendo, este divide-se em duas tarefas. A primeira em que os alunos terão de interpretar e verificar soluções e a veracidade ou falsidade das frases apresentadas. Esta primeira pergunta é muito importante para perceber qual o significado que os alunos dão às soluções da equação.

A segunda tarefa consiste na resolução da equação apresentada na primeira tarefa. Com esta tarefa pretende-se verificar como os alunos entenderam as regras algébricas associadas às equações de 2.º grau e como se apropriaram delas.

- Pergunta do teste 12 de Maio

  Esta pergunta estava incluída no teste elaborado pelo meu professor cooperante, que os alunos realizaram no início do terceiro período o qual pretendia avaliar todos os conteúdos até aí lecionados.

  Este elemento de avaliação tem uma vantagem relativamente ao mini-teste. Visto que há alguma distância temporal entre a data da sua realização e a data em que o tópico das equações foi lecionado, poderei ficar com uma visão mais verdadeira de como os alunos se apropriaram dos conceitos e quais as dificuldades que persistiram.

- Pergunta do teste 20 de Maio

  Esta pergunta foi incluída na minha avaliação mais tarde. Apesar de este teste não estar contemplado na avaliação inicial surgiu a necessidade de o realizar, como tal considerei importante tê-lo em conta na avaliação das aprendizagens dos alunos. Mais uma vez tendo em conta que este teste foi realizado algum tempo depois das aulas em que o tópico das equações de 2.º grau foi lecionado, é interessante ver quais as aprendizagens que os alunos verificaram.

As aulas

Optei por apresentar a minha síntese das aulas tentando ser sobretudo descritiva, apresentando depois as reflexões que fiz das mesmas. Não pretendo que as reflexões sejam cansativas para o leitor, assim sendo, tentei reunir as principais aprendizagens que fiz de cada aula ao invés de apresentar todas as aprendizagens que fiz de cada uma delas. A verdade é que todas as aulas que experienciei, e virei a experienciar, foram riquíssimas em aprendizagens. Cada intervenção, de cada aluno, me disse um pouco mais sobre aquele aluno assim como das aprendizagens que fez, o que me permite compreender um pouco melhor de que forma os alunos aprendem e de que forma os poderei ensinar melhor. Enunciar todas as aprendizagens que fiz, implícitas e explícitas, particulares e gerais, seria muito extenuante para quem lê.

Aproveito já para fazer uma breve reflexão: mesmo sendo uma tarefa morosa, realizar estas sínteses e reflexões foi uma tarefa que me trouxe imensas mais-valias. Além do prazer que é revisitar os momentos em que estive em frente a uma turma, esta visita ao passado permitiu-me, com a calma do distanciamento, perceber melhor aquilo que correu bem e aquilo que correu mal. É desse momento de reflexão distanciada que sai a minha aprendizagem sobre o que é ser professor, agora tenho a certeza.

Aula nº 1 – 17 Março 2014 (90 minutos). A primeira aula, apesar de já estar habituada a estar neste papel, é sempre um elemento motivador de *stress* por isso, tentei planear a aula para que fosse o mais fluida possível. É também preciso ter em conta que apesar de já terem tido contato com outros professores, os alunos não estão ainda habituados a ter tantos professores dentro da sala de aula em simultâneo e temos também que ter em conta que este poderá ser um fator de distração para os alunos.

A aula começou com uns minutos de atraso pois alguns alunos chegaram depois da hora. Estando a maioria presente decidi iniciar a aula apresentando o exemplo pensado, resolvendo a questão do exemplo em conjunto com os alunos. Neste momento estive sempre junto ao quadro, no entanto, os alunos foram os responsáveis por tudo o que foi escrito no quadro (certo ou errado), aproveitei este momento para chamar a participar alguns alunos com mais dificuldades de forma a envolver todos na atividade.

Após a apresentação do exemplo, distribuí as fichas de trabalho pelos alunos, uma por aluno, sendo que as podiam resolver com o colega do lado. Durante o tempo atribuído ao trabalho autónomo, circulei pela sala esclarecendo dúvidas e observando as resoluções dos alunos para que pudesse chamar a participar um leque maior de alunos. Terminado o tempo de trabalho autónomo voltei para junto do quadro e iniciei a discussão/correção da tarefa daí, gerindo as intervenções dos alunos. Nas figuras os alunos confrontaram-se com diferentes expressões possíveis para a área de uma mesma figura o que provocou questões sobre as expressões dos colegas e motivou a sua explicação pelos mesmos. Ao longo desta discussão foi minha preocupação ir introduzindo alguns conceitos e expressões a que os alunos não estariam habituados e corrigir o seu discurso de forma a se tornar mais rigoroso.

No final deste momento surgiu um momento interessante por parte de um aluno:

> *Francisco: B vezes B é B.*
>
> *Professora: 3 vezes 3 é 3?*
>
> *Francisco: Não, mas 1 vezes 1 é 1.*
>
> *Professora: E consegues fazer isso com todos os números?*
>
> *Francisco: Não.*
>
> *Professora: 1x1=1 é a exceção, não é a regra pois $1^2=1$. A regra é $bxb=b^2$.*

[registo de aula,17 de março]

Terminado este momento, fiz uma pequena sistematização do que teríamos feito e chamei a atenção que até agora os alunos tinham trabalhado na transformação das mais diversas expressões algébricas em polinómios reduzidos e ordenados e que agora estaríamos a trabalhar a transformação inversa e que a essa transformação damos o nome de *fatorização.*

Terminada esta tarefa apesentei no quadro as tarefas extra que tinha pensadas, um pouco mais complexas. Tendo perdido algum tempo na tarefa anterior decidi que não iria atribuir tempo para trabalho autónomo aos alunos e optei por resolver as tarefas em grande grupo, sempre guiada pelas indicações dos alunos e questionando as suas intervenções quando me pareceu necessário. Na última tarefa extra os alunos terão encontrado as duas expressões pedidas para a área da figura, no entanto, ao contrário das anteriores que envolviam o processo de colocar um fator em evidência, os alunos tiveram mais dificuldade em reconhecê-las como equivalentes e em perceber como se passaria do polinómio para a expressão fatorizada.

Não tendo tempo para iniciar o trabalho autónomo da segunda ficha de trabalho, optei por dar por terminada a aula aproveitando para sintetizar, juntamente com os alunos, os processos de fatorização que tinham conhecido nessa aula.

Reflexão

Esta aula teve aspetos positivos e negativos, como seria de esperar. Em primeiro lugar não consegui cumprir a planificação feita, notei que tenho ainda alguma dificuldade em prosseguir a aula quando um aluno mostra dificuldades. Ou seja, devo compreender melhor quando a dúvida de um aluno é geral ou particular e caso seja particular não devo insistir nessa dúvida muito tempo, dizendo ao aluno que a dúvida deverá ser tirada no final da aula junto da professora, caso contrário, enquanto tiro uma dúvida a um aluno, todos os outros se dispersam.

Como se viu, introduzi a tarefa com um exemplo realizado em grande grupo. Esta introdução do exercício permitiu que todos os alunos pudessem participar na aula e na tarefa que a seguir lhes ia ser atribuída. Sendo o objetivo da aula introduzir novos conceitos, era muito importante que todos os alunos se envolvessem na tarefa, para que estes novos conceitos não passassem desapercebidos a ninguém. Este momento reforça a importância da apresentação adequada da tarefa.

Outro aspeto a apontar é a importância do rigor do discurso. Os alunos, em quase todas as suas intervenções, têm tendência a usar expressões pouco rigorosas. Cabe ao professor corrigi-las e confrontá-los com os erros que daí podem surgir. É por isso extremamente importante que o professor faça uso de um discurso cuidado e rigoroso, tenho para mim, que se o professor o fizer, mais facilmente o aluno o fará também.

Aula nº 2 – 18 Março 2014 (45 minutos). Não tendo tido tempo de distribuir a segunda ficha de trabalho aos alunos na aula anterior, comecei por distribuir logo de início a ficha e atribui-lhes 15 minutos de trabalho autónomo, que tentei cumprir. Terminado este tempo comecei a discussão/correção a partir do quadro, pois a ficha teria que ficar concluída nessa aula e pensei que dessa forma conseguiria gerir melhor o tempo.

Enquanto os alunos estavam a realizar o seu trabalho autónomo, circulei pela sala de aula reparando nas resoluções dos alunos e esclarecendo possíveis dúvidas. Aproveitei também para apresentar no quadro o enunciado simplificado de forma a perder menos tempo na resolução. Esta aula, inicialmente, foi pensada para ser projetada no quadro ao invés de escrita, mas considerei não ser importante apresentar as figuras da ficha no quadro para que, apesar de terem o apoio visual na ficha, se libertassem dele, fazendo uso apenas da representação algébrica das expressões.

A discussão/correção foi, como já disse, liderada por mim mas em conjunto com os alunos. Mais uma vez, não escrevi nada que não fosse dito pelos alunos aproveitando também para trabalhar o seu rigor na comunicação matemática. Alguns alunos apresentaram as suas respostas, quando solicitados, e depois os restantes alunos colocaram as suas dúvidas. Nesta tarefa não surgiram muitas questões, visto que os alunos podiam facilmente verificar a veracidade da escolha dos colegas através da propriedade distributiva da multiplicação.

Ficaram assim apresentadas no quadro seis pares de expressões das áreas das figuras, sendo uma das expressões um polinómio e a outra uma expressão fatorizada. Foi também importante para mim ressaltar a equivalência das expressões e como se poderia obter a expressão fatorizada a partir do seu polinómio.

A aula terminou ao ser dada autorização aos alunos para sair, aquando do toque de saída.

Reflexão

Esta aula foi muito importante para a "algebratização" do discurso dos alunos. É importante dar espaço aos alunos para que eles se exprimam mas é muito importante que essa expressão seja corrigida respeitosamente pelo professor. Foi também importante nesta aula a "questionação" dos alunos. É muito importante que os alunos sejam questionados sobre as suas intervenções e que sejam interpelados a justificar as suas escolhas e decisões.

Aula nº 3 – 19 Março 2014 (90 minutos). Esta aula terá sido a última aula desta semana. Esta aula tinha como objetivo dar por terminado o tópico das operações com polinómios, nomeadamente a fatorização de polinómios, e introduzir a Lei do Anulamento do Produto a par com uma pequena revisão da noção intuitiva do conceito de equação.

Sendo esta a última aula de matemática da semana e estando próxima da hora de almoço, os alunos estavam muito irrequietos e pouco concentrados. Desta forma, a aula começou com alguma agitação o que provocou algum atraso no início da mesma.

Comecei por distribuir as fichas de trabalho e indicar qual a tarefa que teriam de realizar autonomamente (a pares) e quanto tempo teriam para a realizar. Apresentei a tarefa com a leitura do enunciado e esclarecimento de dúvidas sobre o mesmo.

Durante o trabalho autónomo dos alunos aproveitei para escrever no quadro a síntese do enunciado para não perder tempo durante a discussão/correção da tarefa. No restante tempo aproveitei para circular entre as mesas, esclarecendo as dúvidas dos alunos e apontando, mentalmente, quais os alunos que poderia chamar a participar no momento de discussão.

Terminado o momento de trabalho autónomo passámos à discussão/correção da tarefa.

Na alínea a) da primeira tarefa, os alunos identificaram a sua correção sem grandes problemas:

José:" Se fizermos a distributiva dá o mesmo. Portanto, está certa."

Apesar de correto, este não era o raciocínio de verificação que pretendia que os alunos fizessem, portanto, tendo verificado que mais nenhum aluno resolveu de outra forma, apresentei uma resolução alternativa, questionando-os primeiro se seria possível verificar através de outro processo, nomeadamente a fatorização. Verificámos assim, e ficou registado no quadro, que haveria um fator em comum nos dois termos da expressão e assim, poderíamos pôr esse fator em evidência o que resultaria numa confirmação da conclusão anterior.

Na segunda alínea, houve mais dificuldades, estando esta alínea errada. Apesar de uma grande parte dos alunos afirmar que estaria errada, não sabiam justificar a sua resposta. Surgiu assim a primeira proposta de justificação, que o aluno ditou e eu escrevi no quadro:

$(4b+25)^2=(4b)^2+200b+625$

Havendo dúvidas de outros alunos sobre esta resolução pedi ao aluno que explicasse qual a origem dos termos 200b e 625. Ao que o aluno acrescentou, com simplicidade, que utilizando os casos notáveis:

$$200b=4b\times25\times2$$

$$625=25\times25$$

Mais uma vez, o processo de justificação não incluía a fatorização de polinómios e considerei muito importante pedir-lhes que justificassem a afirmação começando no primeiro membro da igualdade ao invés de começarem no segundo. Tendo notado que os alunos ainda tinham dificuldades neste processo, fiz no quadro a resolução, apoiada pelas sugestões dos alunos e indicando, num canto do quadro, os casos gerais dos casos notáveis, para que os alunos identificassem o processo mais facilmente.

Na terceira alínea voltou a evidenciar-se a preferência por justificar o raciocínio através da transformação em polinómio o segundo membro da igualdade. Sendo suficiente para justificar o seu raciocínio voltei a reforçar que também poderiam ter utilizado o processo de fatorização envolvendo casos notáveis. Tendo ficado os dois processos registados no quadro.

Distribuí, de seguida, a terceira ficha de trabalho, atribuindo algum tempo de trabalho autónomo. Ao circular pela sala apercebi-me que enquanto alguns alunos, a minoria, estariam a resolver a tarefa com bastante facilidade, embora de forma pouco rigorosa, a maioria dos alunos estaria a dispersar e a desviar a sua atenção da tarefa. É importante reforçar que este é o terceiro dia seguido da semana que têm matemática e que a aula é imediatamente antes da hora de almoço. Portanto, resolvi pedir-lhes que parassem o trabalho autónomo e que olhassem para o quadro e resolvemos a tarefa em conjunto.

Esta tarefa começou por expor as dificuldades que os alunos têm em traduzir a linguagem corrente em linguagem matemática:

Francisco[no quadro]: 0×2÷1=0

Professora: A que operação corresponde a diferença?

Madalena: subtração

Professora: Francisco, queres reformular?

Francisco: 0,5×2-1=0

1-1=0

Professor: O que escreveste é verdade, mas o que escreveste não é o dobro da diferença.

[registo de aula, 19 de março]

Neste momento optei por auxiliar o aluno e escrevi no quadro:

2×(?-1)=0

Desta forma tornei mais claro para os alunos como poderiam traduzir para linguagem matemática os enunciados que tinham à sua frente.

Nas alíneas 2, 3 e 4, os alunos propuseram sempre como solução o algarismo zero e justificaram as suas respostas com o esquema dos pontos de interrogação. Visto que o zero não seria solução única para nenhuma das alíneas questionei os alunos sobre a existência de outro número que verificasse o pedido do enunciado. Não sendo tão intuitivo para eles, ao olharem o esquema do ponto de interrogação as soluções acabavam por surgir.

Este esquema do ponto de interrogação não foi previamente pensado por mim, mas tendo surgido e tendo sido tão bem recebido pelos alunos, acabei por fazer uso dele para introduzir as equações antecipadamente, questionando os alunos se, em matemática, não poderíamos substituir o "?" por outro símbolo, ao que os alunos responderam "incógnitas" , desta forma, através das sugestões dos alunos, substituí o símbolo "?" pela letra **p:**

$p\times 2+p^2=0 \qquad\qquad p=?$

Professora: Quantas incógnitas estão nesta equação?

Alunos: Uma

Professora: Quantas soluções?

Alunos: Duas.

Professora: Qual o grau da equação?

Luísa: dois.

Professora: Então uma equação de 2.º grau pode ter até quantas soluções?

[registo de aula, 19 de março]

Desta forma os alunos perceberam que as equações de 2.º grau envolvem sempre uma incógnita de grau 2 e que podem ter até duas soluções.

Terminada esta pequena e inesperada introdução das equações, voltei ao assunto que tinha planeado: a lei do Anulamento do Produto e introduzi a questão extra da ficha:

"Quando é que o produto entre dois fatores é zero?"

Tendo ficado registado no quadro:

Lei do Anulamento do Produto

Para que o produto de dois ou mais fatores seja zero basta que um deles seja zero.

Exemplo:

$5a=0 \Leftrightarrow a=0 \qquad\qquad 5\times 0=0 \quad \surd$

$2\times(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1 \qquad\qquad 2\times(1-1)=0 \quad \surd$

Por fim, apresentei-lhes a tarefa extra como exercício e em conjunto resolvemos o mesmo. Estando o tempo a terminar, optei por não continuar com as restantes alíneas da tarefa extra que tinha pensado e a aula terminou.

Reflexão

Esta aula teve vários momentos importantes, aqueles que considero importante destacar foram aqueles que mais aprendizagens me proporcionaram.

Verifiquei quão importante é ser flexível e estar recetiva às participações dos alunos. Apesar de ser indispensável a antecipação das intervenções dos alunos, estes conseguem sempre surpreender-nos com raciocínios, observações ou conclusões que poderão ser muito úteis tanto para a sua aprendizagem como para a aprendizagem dos seus colegas. É importante ter muito presente qual o objetivo de aula de forma a conseguir incluir estas participações. Além de que é muito importante para autoestima dos alunos que as suas intervenções sejam validadas e aproveitadas pelo professor assim, sentem que têm um papel ativo na aula de matemática.

Esta aula foi também marcada por alguma agitação de alguns alunos. Esta agitação dos alunos contribuiu para a minha própria agitação. Tentei sempre manter-me relaxada, mas confesso que foi difícil. É muito importante ter presente que numa sala de aula o único adulto será o professor e cabe a este manter a ordem e a calma.

Aula nº 4 – 24 Março 2014 (90 minutos). Esta aula deu início à segunda semana desta unidade didática. Não tendo terminado as tarefas extra que tinha planeado para a semana anterior, optei por dar continuidade às mesmas visto que estas seriam as tarefas que pretendiam introduzir as equações de 2.º grau, além de que pensei que poderiam servir também como revisão da aula anterior para que os alunos se situassem novamente na matéria pois seria uma tarefa muito parecida à que fora realizada na aula anterior com os alunos. No entanto, esta tarefa extra pretendia que os alunos, além de apresentarem uma solução para as perguntas feitas, apresentassem também uma equação que traduzisse a pergunta feita.

Escrevi então a segunda pergunta extra no quadro, enquanto os alunos entravam e se sentavam. Terminado este momento, expliquei aos alunos em que consistia a sua tarefa e pedi a sua intervenção:

Luísa: $?^2 + ? = 0$

Professora: Podemos substituir o "?" ?

Luísa: x+x=0

Professora: Agora, como resolvemos esta equação?

Madalena: Substituímos a incógnita por um número?

Professora: Isso é resolver a equação?

Madalena: Não, é verificar.

[registo de aula, 24 de março]

Após este momentos, em que os alunos, tal como era esperado, se debateram com o processo de resolução de uma equação de 2.º grau, resolvi, em conjunto com os alunos a equação utilizando primeiramente a fatorização de polinómios e depois a Lei do Anulamento do Produto. Os registos no quadro, apesar de serem feitos por mim, foram-me sempre ditados pelos alunos, tive sempre a preocupação de escrever na íntegra tudo o que me era ditado, mesmo quando estava incorreto, para que o próprio aluno ou os colegas identificassem os possíveis erros e com esses erros tivessem também alguma aprendizagem.

De seguida apresentei o terceiro exercício extra, onde mais uma vez os alunos tiveram alguma dificuldade na passagem da linguagem corrente para a linguagem matemática:

Após este momento, resolvemos a equação em conjunto, sendo cada passo sugerido por um aluno diferente.

Durante estes momentos optei por apresentar a Lei do Anulamento do Produto no quadro ao lado, para que os alunos a tivessem presente.

A duração desta tarefa estendeu-se mais do que eu desejaria o que comprometeu o início da tarefa que tinha pensado para esta aula.

Terminada a conclusão da aula anterior, passei então para a distribuição da ficha de trabalho pensada para esta aula. De seguida li o enunciado e esclareci dúvidas sobre o mesmo, para que os alunos pudessem trabalhar autonomamente.

Rapidamente passámos à discussão da primeira tarefa da ficha de trabalho. Alguns dos alunos optaram por, eles próprios, resolver a equação em causa e indicar a resolução da Catarina como certa, pois teria o mesmo conjunto-solução que a resolução que eles próprios fizeram. Após esta verificação por parte dos alunos, pedi-lhes que identificassem os erros da Anabela e do Bernardo para que percebessem os erros que estas resoluções tinham, pois estes são erros muito frequentes nos alunos.

Este momento foi realizado oralmente e no quadro ficaram indicados os erros sendo a justificação dos erros feita oralmente.

Terminada a tarefa, prosseguimos para a segunda tarefa da ficha de trabalho, após o esclarecimento de dúvidas e o momento de trabalho autónomo, preenchemos, em conjunto, os espaços em branco da resolução da equação A. Tendo reparado que a aula estava perto do fim, mais uma vez, optei por dar por terminada a aula e continuar a discussão da tarefa na aula seguinte.

Reflexão

Continuei sem conseguir gerir eficientemente os tempos de aula. Mesmo tendo uma tarefa em atraso, deveria ter conseguido recuperar esse tempo. As aprendizagens dos alunos estão sempre em primeiro lugar mas é muito importante ter presente que tenho um calendário para cumprir.

Outra das questões importantes a refletir nesta aula é a organização do quadro. Reparei na importância do uso correto das cores e da gestão eficiente do espaço do quadro. Apesar de ter tido sucesso no uso das cores, o mesmo não se verificou nos registos dos alunos, a gestão do espaço do quadro podia ter sido mais eficaz. Mesmo tendo planeado esta gestão antecipadamente, é muito importante continuar a observar os meus próprios registos e de que forma estes se apresentam.

Aula nº 5 – 25 de Março (45 minutos). A aula começou com os registos da tarefa da aula anterior já apresentados no quadro, desta forma, mal os alunos chegassem e se organizassem poderíamos terminar a discussão da tarefa e iniciar a ultima tarefa da ficha de trabalho.

Visto que estaria muito limitada de tempo, apresentámos a correção em grande grupo. Na equação B, não surgiram dúvidas aquando do preenchimento dos espaços em branco. Na equação C, levantou-se a questão de quais seriam as duas soluções para a equação $x^2=4$, notando que os alunos não tiveram dificuldade em identificar $x=2$ como solução da equação, foi necessário reescrever $(-2)^2=(-2)(-2)=4$ para que os alunos reconhecessem $x=-2$ como a outra solução da equação.

Terminado o esclarecimento de dúvidas da equação C da segunda tarefa da ficha de trabalho, pedi aos alunos que fizessem a terceira tarefa da ficha explicando-lhes que consistia na resolução de várias equações de 2.º grau onde teriam que aplicar os conhecimentos até aí adquiridos, como a fatorização de polinómios ou a Lei do Anulamento do Produto, para obter as soluções das mesmas.

Durante o trabalho autónomo fui pedindo a alguns alunos que fossem apresentar a sua resolução no quadro, dirigindo-se no final para o seu lugar, para que após a apresentação das três primeiras alíneas, se discutissem em grande grupo estas três resoluções.

No entanto, esta discussão não foi possível durante esta aula. Pedi-lhes então que arrumassem, recolhi as suas fichas de trabalho, dando por terminada a aula. Por fim, anotei as três resoluções apresentadas no quadro para que na aula seguinte pudéssemos continuar a partir desse ponto.

Apesar de não ter conseguido terminar a tarefa tal como tinha planeado, optei por distribuir na mesma o mini-teste pois os alunos já teriam sido confrontados com tarefas envolvendo equações de 2.º grau suficientes. Ao distribuir o mini-teste apercebi-me que a alínea d) da tarefa 1.1 não fazia sentido e indiquei no quadro que os alunos não a deveriam fazer.

Terminado o mini-teste disse aos alunos para sair.

Reflexão

Durante esta aula consegui afastar-me do quadro, o que provocou bons momentos, uma vez que alunos apresentaram os seus raciocínios entre eles sendo o meu papel puramente de gestão das intervenções. Ainda há margem para melhorar, no entanto penso que consegui deixar de centrar a aula no professor.

Como referi na descrição da aula, eliminei uma questão do mini-teste no início do mesmo. Esta situação ensinou-me que apesar de ter tido o cuidado construir o mini-teste tendo em conta as aprendizagens dos alunos, pode sempre escapar algo e é importante que estas questões sejam detetadas e informadas aos alunos da forma mais natural possível.

Aula nº 6 – 26 de Março (90 minutos). Esta aula voltou a começar com muita agitação, mais uma vez, esta é a última aula de matemática da semana e é muito próxima da hora de almoço. Cheguei antes da hora para escrever no quadro as resoluções das alunas da aula anterior.

Comecei por perguntar se havia dúvidas nas resoluções apresentadas, não havendo dúvidas prossegui perguntando apenas se haveria uma forma alternativa à resolução da alínea a) ao que uma das alunas respondeu que poderia ser feita recorrendo aos casos notáveis.

Pedi então aos alunos que resolvessem no lugar as restantes alíneas.

Débora [no quadro]:

$$(n+1)(2n+2)=2$$

$$2n^2+2n+2n+2=2$$

$$2n^2+4n=0$$

$$2n^2=0 \vee 4n=0$$

$$n=0 \vee n=0$$

$$C.S.=\{0,0\}$$

Professora: Dúvidas para a Débora?

Gonçalo: Está mal porque ela não pode pôr $2n^2=0 \vee 4n=0$ *, tinha que dividir por n.*

Luísa: Não pode fazer $2n^2=0 \vee 4n=0$ *porque o que dá zero é a soma dos dois termos e não cada um.*

[registo de aula, 26 de março]

Depois destas intervenções, a aluna corrige a sua resolução com a ajuda das colegas. Determinado o conjunto-solução correto, passamos à equação da alínea e):

Fernando:

$$(5n+3)^2=0$$

$$(5m-3)(5m-3)=0$$

$$5m-3=0 \vee 5m-3=0$$

$$5m=3 \vee 5m=3$$

$$m=3/5 \quad \vee m=3/5$$

$$C.S=\{3/5\}$$

Madalena: Porque não aplicaste a distributiva?

Fernando: Porque tentei e tornou-se confuso. Porque cheguei a meio e não sabia o que fazer.

Professora: Vamos aplicar, aqui ao lado, a distributiva. (e desloquei-me até ao quadro)

$$25m^2-30m+9=0$$

Professora: E agora?

Madalena: Colocamos o m em evidência

Professora: O 9 é divisível por m?

Madalena: Não.

Fernando: Tínhamos de passar o 9 para o outro lado.

Professora: Muito bem, então m(25m-30)=-9, e agora?

Madalena: Então, $m=-9 \vee 25m-30=-9$.

Professora: Quando é que estamos em condições de usar a Lei do Anulamento do Produto?

Turma: Quando está igual a zero.

Professora: Podemos resolver assim a equação, Madalena?

Madalena: Não.

Professora: Então, turma, se um dos membros já está fatorizado e igualado a zero, faz sentido voltar atrás?

Turma: Não.

Professora: Então a resolução do fernando estará correta?

Turma: Sim.

[registo de aula, 26 de março]

Não tendo surgido mais dúvidas e notando que faltariam poucos minutos para terminar a aula pedi-lhes que terminassem a última alínea em casa e que a trouxessem na próxima aula resolvida.

Reflexão

Apesar de considerar que o resultado foi positivo, não consegui, mais uma vez, cumprir a planificação, tendo de deixar a última ficha de trabalho preparada para a semana seguinte. Chegando ao fim das duas semanas e raramente tendo conseguido cumprir a planificação, penso que deveria ter incluído menos alíneas nas fichas de trabalho. No futuro, ao aplicar novamente esta sequência de tarefas, terei de fazer uma escolha das alíneas que considerei mais importantes e terei também de ser menos sensível às dúvidas individuais que surgem em aula, remetendo essas dúvidas para o final da aula.

Aprendi, com esta aula, também, que é importante dar espaço aos alunos para errar. Introduzir o erro, como se viu na interação entre o Fernando e a Madalena, foi importante para que tanto a Madalena como o resto da turma se apercebessem do erro e o compreendessem.

4 - A minha investigação

Ao longo deste ano experienciei várias coisas novas, pela primeira vez fui responsável pela aprendizagem de uma turma e pela primeira vez realizei uma investigação, mesmo que em pequena escala. Mergulhar na prática letiva e refletir sobre ela é o que caracteriza, na sua essência, a profissão do professor, no entanto não se fica por aí. Como futuros profissionais do ensino, temos o dever de nos manter atualizados e a par do que se passa no mundo da educação, em particular na educação matemática e, para tal, não basta refletir sobre a nossa prática ou "entrar" na sala de outros colegas. É extremamente importante que procuremos estar a par da investigação que se faz na área do ensino, mais especificamente no ensino da matemática. Esta aproximação com a investigação permite-nos alargar as nossas fontes e aprender com as experiências dos investigadores.

Ao deter-me para pensar um pouco sobre esta questão, apercebi-me que caso nunca tivesse sido confrontada com a necessidade de investigar no contexto deste estudo, provavelmente nunca o teria feito de uma forma tão consciente, reflexiva e abrangente. Conhecer o trabalho que tem sido feito a respeito das equações de 2.º grau, permitiu-me estar alerta e consciente das dificuldades que poderiam surgir durante as minhas aulas, o que não teria sido possível caso não o tivesse feito.

Recolha de dados

Estando desperta para as dificuldades e questões que poderiam surgir durante as minhas aulas, foi mais fácil decidir quais as estratégias, metodologias e materiais que seriam mais pertinentes tanto na prática letiva como na minha investigação. Comecei por preparar os materiais para que daí pudesse fazer inferências sobre as questões propostas no trabalho. Desta forma, os materiais que recolhi foram:

- **Observação**

Uma das formas mais usuais de recolha de dados é a observação e consequente registo. Realizei breves registos durante as aulas e no final das aulas, para que a tarefa de investigar não dependesse apenas das minhas memórias. Estes registos foram depois analisados e inseridos na investigação.

Aproveitei ainda a presença de outros professores em sala de aula e pedi à minha colega de estágio, Andreia, para anotar, dentro das suas possibilidades, as interações realizadas durante as aulas assim como os meus registos no quadro. Dei-lhe a indicação de que seria importante registar as interações em grande ou pequeno grupo que dissessem respeito às dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução das tarefas mas também as interações que dissessem respeito as questões propostas neste trabalho.

Visto que pretendia observar a turma no seu todo, fazer uma gravação poderia tornar difícil a tradução do material e identificação das intervenções.

- **Produções escritas dos alunos**

Em todas as aulas as fichas de trabalho foram recolhidas no final para que pudesse tirar fotocópia das produções escritas dos alunos e daí recolher informações sobre os seus raciocínios e processos de resolução.

Foram ainda recolhidos os mini-testes realizados pelos alunos que além de avaliados e classificados, foram analisados de forma a recolher evidências que contribuíssem também para responder às questões propostas neste trabalho. Com o mesmo objetivo, fotocopiei as resoluções dos alunos dos testes de 12 e 20 de Maio, sendo que este último foi resolvido por apenas alguns dos alunos. Estes dois testes, tendo sido feitos sensivelmente um mês e meio após as aulas sobre equações de 2.º grau, permitiram-me também recolher informações sobre as aprendizagens que persistiram nos alunos.

Análise de Dados

Sendo o objetivo deste estudo compreender as principais dificuldades que os alunos manifestam na resolução de equações de 2.º grau, no 8.º ano de escolaridade, propus-me a responder a duas questões: “Que significados os alunos atribuem à solução da equação quadrática em contextos diversificados?” e “Como procedem os alunos para resolver equações de 2.º grau?”. Para que conseguisse fundamentar as respostas às questões que formulei, selecionei e analisei os dados que recolhi consoante a sua pertinência em relação às questões que estabeleci, apresentando de seguida esta mesma análise.

A análise dos dados está organizada em dois tópicos. O primeiro referente à questão deste trabalho relativa ao significado da solução da equação de 2.º grau e o segundo tópico referente à questão relativa aos processos de resolução de equações de 2.º grau apresentados pelos alunos.

Significado atribuído à solução da equação de 2.º grau. Apesar de os alunos já terem abordado o tema das equações em anos anteriores, é no 8º ano que têm o primeiro contacto com as equações de 2.º grau. É de esperar que, por isso, às dúvidas que persistiram dos anos anteriores, acresçam outras dúvidas no que diz respeito aos significados que os alunos atribuem à solução da equação de 2.º grau.

Começo então por um dos significados que persistem do ano anterior. Os alunos, ao serem confrontados com uma equação tendem a interpretar o sinal de igual como um símbolo que lhes indica uma “ação”: apresentar um resultado da ou das operações do primeiro membro da equação. É também interessante notar que esta dúvida, nesta turma, apenas se manifestou em alunos com dificuldades muito acentuadas, talvez porque, apesar de ser uma dificuldade muito referida na literatura, tenha sido ultrapassada pela maior parte dos alunos no 7.º ano, quando abordaram as equações pela primeira vez. Um exemplo deste tipo de confusão pode ver-se na ilustração 3 com resolução da Teresa no exercício 7.2 do Teste de 12 de Maio.

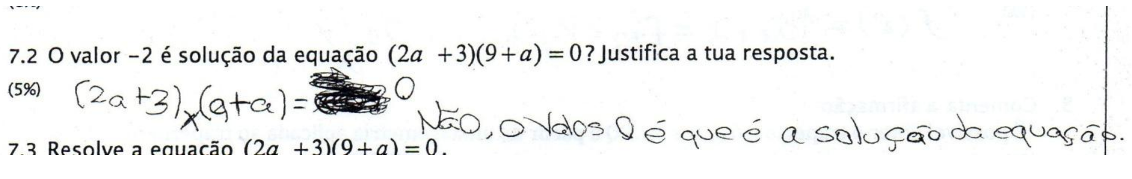

7.2 O valor −2 é solução da equação $(2a\ +3)(9+a)=0$? Justifica a tua resposta.
(5%) $(2a+3)\times(9+a)=0$ NÃO, o valor 0 é que é a solução da equação.
7.3 Resolve a equação $(2a\ +3)(9+a)=0$.

Ilustração 3 - Resolução da Teresa da questão 7.2 do teste de 12 de Maio

Aqui, ao ser-lhe perguntado se o valor -2 é solução da equação, a aluna responde negativamente, e, repare-se, a justificação que dá é que “ zero é que é a solução da equação”. A aluna identifica o segundo membro da equação do enunciado como a solução da equação, considerando-a como o resultado da operação indicada no primeiro membro.

Um outro exemplo deste tipo de interpretação pode ver-se na resolução de uma terceira aluna (ilustração 4) nas alíneas 7.1.1 e 7.1.2, que, para além disso, também mostra a sua necessidade de atribuir valores numéricos nas expressões dadas — repare-se que em M substituiu *a* por dois e em N por 1.

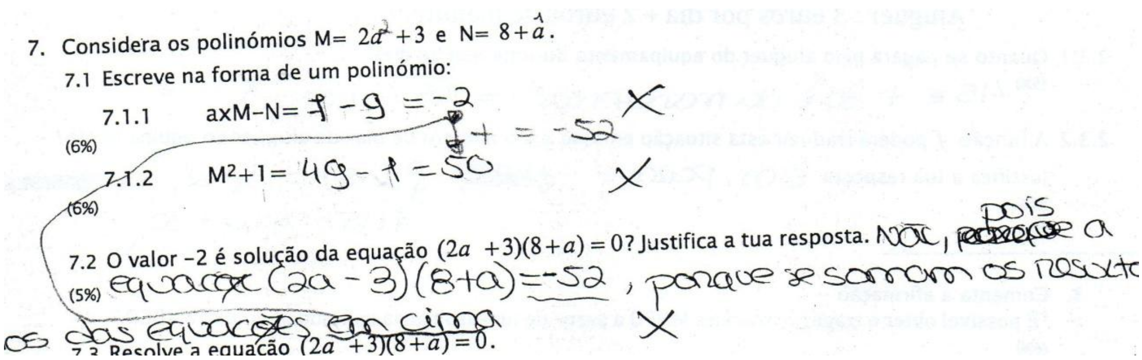


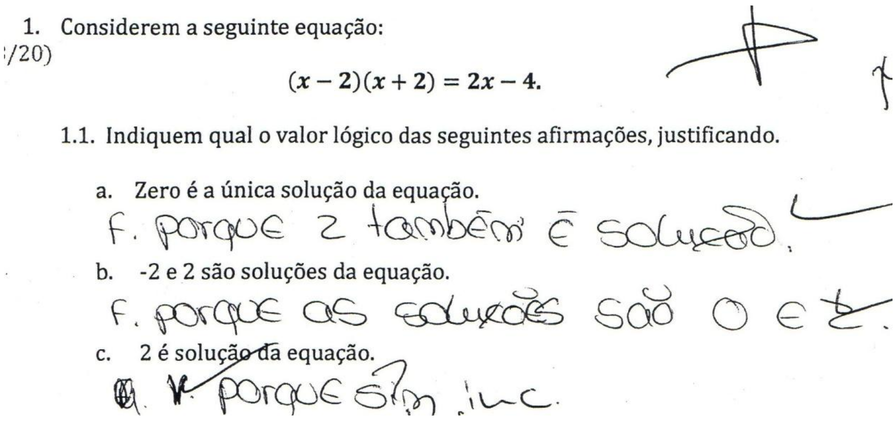
Ilustração 4 - Resolução da Bianca da questão 7 do teste de 12 de Maio

Repare-se ainda que a aluna, dos cálculos (incorretos) que efetua depois destas substituições obtém o valor -52 que identifica como a solução da equação dada escrevendo: “Não [o valor – 2 não é solução], porque se somam os resultados das equações em cima”. E daqui se vê que a aluna considera que a solução de uma equação é o valor numérico que aparece depois do sinal de igual. Esta resolução não é muito compreensível devido ao elevado número de erros que a aluna apresenta. Mas tentemos abstrairmo-nos dos erros numéricos e das confusões algébricas apresentadas, focando-nos apenas no que é, para a aluna, a solução da equação apresentada. Fazendo esse esforço, parece-me muito óbvio que a aluna compreende a solução de uma equação como o valor que está no segundo membro sem que compreenda qual é o seu verdadeiro significado.

Mais uma vez chamo a atenção para o facto de que este tipo de entendimento de solução de uma equação apenas se apresentou em alunos com muitas dificuldades, como é o caso das alunas cujas resoluções apresentei. E sendo uma compreensão que não foi conseguida no ano anterior, é expetável que as confusões associadas persistam e eventualmente se acentuem, visto que este ano as equações se tornam mais complexas.

Outra das dificuldades que persiste de anos anteriores está relacionada com o processo de verificação da solução de uma equação. Alguns alunos consideram a solução de uma equação como o valor encontrado para a incógnita no último passo do processo de resolução, não compreendendo que, para que esse valor seja solução da equação, temos que obter uma identidade quando a incógnita é substituída por ele na equação inicial (ou numa equivalente). Esta dificuldade muitas vezes traduz-se na ausência de justificações ou na apresentação de justificações vagas.

Um exemplo de situações como estas é o caso das dificuldades que dois alunos manifestaram na resolução da pergunta 1.1 do mini-teste que apresento na ilustração 5, onde eram pedidas justificações, que apesar de estarem apresentadas na ilustração só foram realizadas pelos alunos depois da minha intervenção (ver excerto do diálogo que a propósito se passou e que apresento imediatamente a seguir à ilustração). É também importante referir que a pergunta 1.2 pedia aos alunos que resolvessem a equação apresentada na pergunta 1.


1. Considerem a seguinte equação:
/20)

$$(x-2)(x+2)=2x-4.$$

1.1. Indiquem qual o valor lógico das seguintes afirmações, justificando.

a. Zero é a única solução da equação.
F. porque 2 também é solução.

b. -2 e 2 são soluções da equação.
F. porque as soluções são 0 e 2.

c. 2 é solução da equação.
V. porque sim. inc.

Ilustração 5 - Resolução da Raquel e do Fernando da questão 1.1 do mini-teste

Professora: Porque é que é falso? [apontei para a resposta da alínea b)]

Raquel: Porque… [apontou para o conjunto solução da tarefa 1.2]

Professora: Então como sabem que o -2 não é solução?

Fernando: Porque [o conjunto solução] deu zero e dois.. Têm de ser estes valores…

Professora: É a única forma de justificar?

Raquel: Não sabemos de outra maneira… Está mal?

Professora: Está justificado, não está?

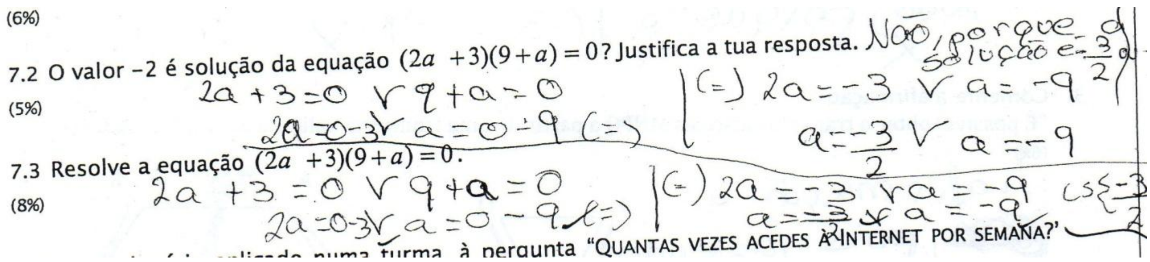
Fernando: Sim..

Professora: Podem continuar.

[registo de aula, 26 de Março]

Estes alunos compreendem a solução da equação apenas como o valor da incógnita que aparece no final do processo de resolução. Nas alíneas a e b do exercício 1.1 as suas justificações, apesar de corretas, foram feitas recorrendo ao conjunto solução que tinham já obtido por terem realizando previamente a questão, provando que os alunos não compreendem que aqueles valores, se substituídos na equação inicial, ou numa sua equivalente, irão transformar a igualdade numa identidade. Esta dificuldade é ainda mais evidente na justificação apresentada na alínea c. O “Porque sim…” dos alunos mostra que esta é a única justificação possível, para eles, pois a solução da equação é apenas o valor que obtêm para a incógnita no final do processo de resolução.

O mesmo acontece na resolução da Débora do exercício 7.2 e 7.3 do teste de 12 de Maio (ilustração 6), onde se vê que a aluna, na pergunta 7.2 opta por resolver a equação em vez de fazer a verificação do valor proposto para solução no enunciado:


(6%)

7.2 O valor −2 é solução da equação $(2a+3)(9+a)=0$? Justifica a tua resposta. Não, porque a solução é $-\frac{3}{2}$ ou -9

$2a+3=0 \vee 9+a=0 \Leftrightarrow 2a=0-3 \vee a=0-9 \Leftrightarrow 2a=-3 \vee a=-9 \Leftrightarrow a=-\frac{3}{2} \vee a=-9$

(5%)

7.3 Resolve a equação $(2a+3)(9+a)=0$.

$2a+3=0 \vee 9+a=0 \Leftrightarrow 2a=0-3 \vee a=0-9 \Leftrightarrow 2a=-3 \vee a=-9 \Leftrightarrow a=-\frac{3}{2} \vee a=-9$ C.S. $\{-\frac{3}{2}, -9\}$

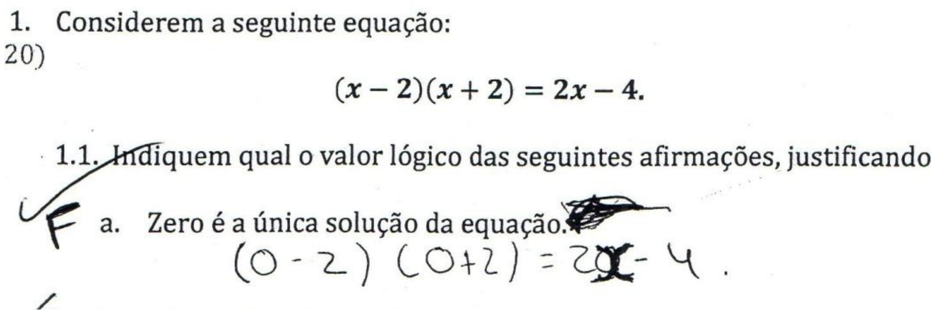
(8%)

Ilustração 6 - Resolução da Débora da questão 7.2 do teste de 12 de Maio

A aluna resolve a equação corretamente e justifica que -2 não pode ser solução, pois esse valor não se encontra entre as soluções que a aluna obteve. É de chamar a atenção que a justificação está correta no entanto, mostra que a aluna tem a necessidade de resolver uma equação para confirmar a sua solução, não compreendendo que bastava substituir a incógnita por -2 e verificar que este valor transformaria a igualdade inicial numa proposição falsa. Ou seja, também esta aluna se limita a realizar o processo de resolução e a considerar o valor final que obtém como a solução da equação dada.

Interpretar erradamente o significado do sinal de igual numa equação e encarar a solução de uma equação apenas como o resultado do seu processo de resolução, são erros que persistem de anos anteriores. Este ano, a estas, somam-se outras dificuldades devido à presença de polinómios de 2.º grau nas equações. Veja-se ainda o processo de verificação de uma equação. Já no ano anterior os alunos mostraram alguma dificuldade em reproduzi-lo no entanto, este ano a dificuldade aumenta a par da complexidade das equações.

Os alunos mostram dificuldade em fazer a verificação da solução pois não compreendem que uma mesma incógnita terá que ter sempre o mesmo valor, independentemente da quantidade de vezes que se repita na equação. Veja-se a ilustração 7, aqui observa-se a resolução da tarefa 1.1 do mini-teste pela Bianca e pela Diana, em que as alunas, para justificarem o valor lógico da afirmação, substituem a incógnita por zero no primeiro membro e não substituem no segundo.


1. Considerem a seguinte equação:
20)

$$(x-2)(x+2) = 2x-4.$$

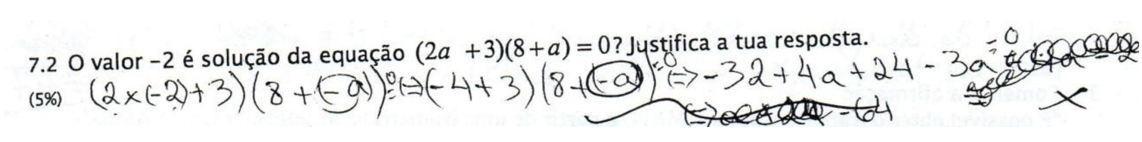
1.1. Indiquem qual o valor lógico das seguintes afirmações, justificando

F a. Zero é a única solução da equação.

$(0-2)(0+2) = 2x-4$.

Ilustração 7 - Resolução da Bianca e da Diana da questão 1.1 no mini-teste

Estas alunas atribuem valores diferentes a x conforme este se encontra no primeiro ou no segundo membro da equação. Vê-se então que não compreendem que o x, independentemente da sua localização e repetição deverá sempre assumir o mesmo valor. O mesmo tipo de erro é realizado por outro aluno na resolução do teste de 12 de Maio:


7.2 O valor −2 é solução da equação $(2a+3)(8+a)=0$? Justifica a tua resposta.
(5%)

$(2\times(-2)+3)(8+(-a)) = 0 \Leftrightarrow (-4+3)(8+(-a)) = 0 \Leftrightarrow -32+4a+24-3a$

Ilustração 8 - Resolução do João da questão 7.2 do teste de 12 de Maio

Na resolução apresentada na ilustração 8, reparamos que o aluno procede corretamente para verificar se -2 é solução da equação, substituindo a incógnita por -2, no entanto fá-lo apenas no primeiro fator do primeiro membro da equação. A este propósito, numa aula que se seguiu à realização desta tarefa, tive com o aluno o seguinte diálogo:

Professora: João, no teu teste, porque resolveste desta forma? [apontei para a resolução da questão 7.2]

João: Substituí porque era pedido para verificar.

Professora: Porque substituíste no primeiro "a" e no segundo não?

João: Porque o segundo é a outra solução da equação.

[registo de aula, 14 de Maio]

Este caso é um pouco diferente do da Bianca e da Diana, com o João surge uma confusão devido à existência de duas soluções para uma mesma equação. A Bianca e a Diana não reconhecem que a incógnita deve assumir sempre o mesmo valor independentemente da quantidade de vezes que se repita numa equação enquanto a dúvida do João é específica das equações de 2.º grau. Estas equações podem ter duas soluções e o aluno ao ver duas vezes a incógnita na equação, assume que na primeira vez ela assume o valor -2, mas que na segunda deverá assumir o valor de uma segunda solução: "Porque o segundo é a outra solução da equação". Esta confusão pode surgir do facto de o primeiro membro estar fatorizado e igualado a zero, e assim os alunos associam a equação com a lei do anulamento do produto e consequentemente com o surgimento de duas equações do primeiro grau.

Veja-se agora a resolução da Madalena apresentada na ilustração 9:

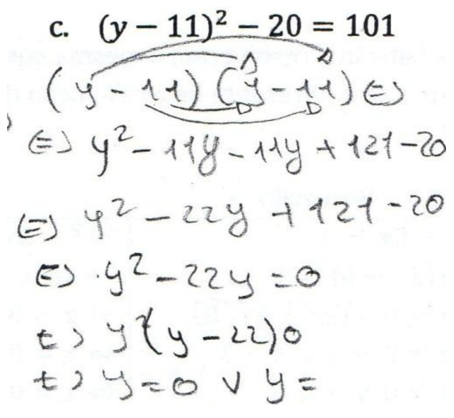
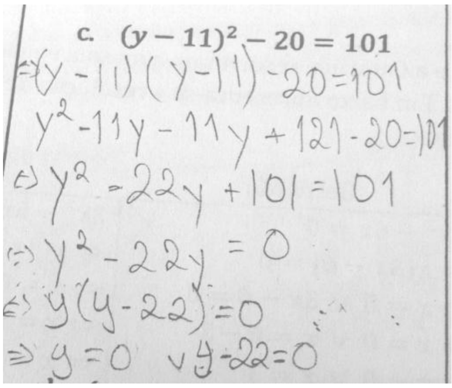


Ilustração 9 - Resolução da Madalena na questão 3 b) da ficha nº4

Na resolução desta questão, a aluna começa por 'esquecer' o segundo membro da equação mas a partir do terceiro passo reproduz o processo de resolução de equação eficazmente mas no final não consegue identificar a segunda solução. Esta omissão poderá ter origem dificuldade em considerar que uma equação pode ter duas soluções.

O mesmo se pode ver na resolução do João apresentada na ilustração 10, em que o aluno usa com facilidade as operações com polinómios, as técnicas de fatorização e a lei do anulamento do produto, no entanto termina a resolução sem determinar o conjunto solução, o que, na minha opinião, se pode dever à dificuldade de referida anteriormente.



c. $(y-11)^2-20=101$

$\Leftrightarrow (y-11)(y-11)-20=101$

$y^2-11y-11y+121-20=101$

$\Leftrightarrow y^2-22y+101=101$

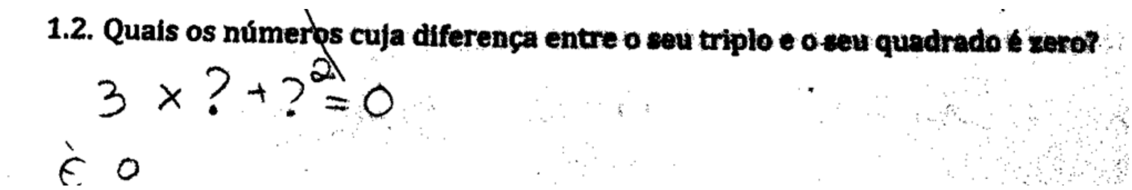
$\Leftrightarrow y^2-22y=0$

$\Leftrightarrow y(y-22)=0$

$\Rightarrow y=0 \vee y-22=0$

Ilustração 10 - Resolução do João da questão 3b) da ficha nº4

Ao serem confrontados com equações de 2.º grau, e tendo tido a experiência das equações de primeiro grau, os alunos 'satisfazem-se' depois de encontrarem uma solução e têm dificuldade em integrar a existência de duas soluções em equações do 2.º grau. Tal como se vê na ilustração 11, a aluna ao ser confrontada com uma equação de 2.º grau, encontra uma solução, zero, e termina a resolução por aí.



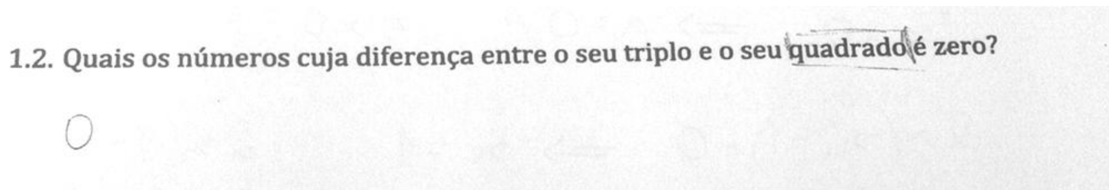
1.2. Quais os números cuja diferença entre o seu triplo e o seu quadrado é zero?

$3 \times ? + ?^2 = 0$

È 0

Ilustração 11 - Resolução da Luísa na questão 1.2 da ficha nº3

Este problema aconteceu também com o João:



1.2. Quais os números cuja diferença entre o seu triplo e o seu quadrado é zero?

0

Ilustração 12 - Resolução do João da questão 1.2 da ficha nº4

Ao circular pela sala e vendo a resolução do João (ilustração 12) aproveitei para esclarecer a questão, confirmando que o aluno teria identificado apenas uma solução por pensar que a sua tarefa já estaria terminada.

Professora: Porquê zero?

João: Fiz de cabeça..

Professora: E não há mais números [nessas condições?]?

João: Não sei, como já tinha achado este, pensei que não houvesse mais.

[registo de aula, 24 de Março]

Nesta tarefa foram muitos os alunos que apresentaram o zero como resposta à pergunta, não tendo apresentado outra possibilidade. Tendo aprendido as equações de primeiro grau no ano anterior, é expectável que assumam que haja apenas uma solução. O que não será de estranhar, visto que esta era uma tarefa introdutória e as equações de 2.º grau ainda não tinham aparecido.

Os alunos têm também dificuldade em reconhecer uma solução dupla. Na ilustração 13, como pude observar, o aluno completou o primeiro espaço em branco do último passo com zero e depois corrigiu.

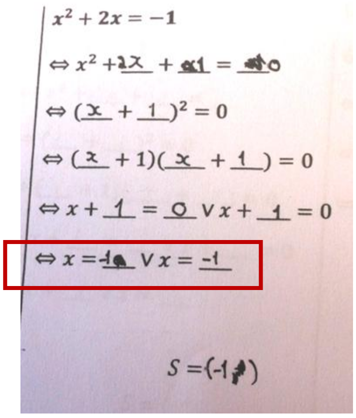


Ilustração 13 - Resolução do Rui da questão 2 da ficha nº 4

A dúvida que o aluno começou por ter poderá relacionar-se com o facto que a solução -1 não poderia 'aparecer' duas vezes. Aquando deste momento aproveitei para esclarecer que as equações de 2.º grau podem ter apenas uma solução e que nesse caso se diz dupla. A dúvida não voltou a surgir. Ainda assim, optei por não aprofundar a minha explicação pois a confirmação torna-se muito mais acessível quando os alunos explorarem a função quadrática, como este tópico será apenas abordado no 9º ano considerei que seria um elemento provocador de ruído para os alunos.

Como procedem os alunos para resolver tarefas que envolvam equações de 2.º grau? Que dificuldades manifestam? São vários os fatores que contribuem para que os alunos tenham dificuldade na resolução de equações de 2.º grau do 8.º ano. Dificuldades no cálculo algébrico ou parca compreensão dos processos que estão envolvidos na resolução deste tipo de equações são alguns destes fatores. Neste trabalho foi também meu objetivo verificar como os alunos procedem para resolver equações de 2.º grau e quais as dificuldades que sentem. Este será o conteúdo do presente tópico.

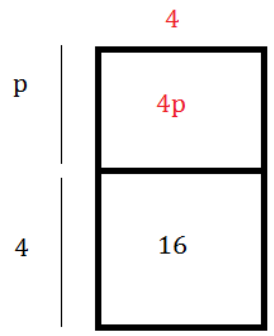


Ilustração 14 - Registo no quadro da questão B da ficha nº1

Começo, mais uma vez, por uma dificuldade que transita do ano anterior: realizar cálculos algébricos. Desde que começam a trabalhar Álgebra, os alunos sentem dificuldades, que no 8.º ano aumentam consideravelmente devido à introdução das operações com polinómios de grau superior a um. Ao não compreenderem como se realizam operações com polinómios, os alunos cometem erros que lhes tornam mais difícil a compreensão do processo de resolução de uma equação. Veja-se um exemplo desta dificuldade. Ao pedir aos alunos que determinassem uma expressão para a área de algumas figuras apresentadas na questão B da ficha n.º 1 (ANEXO), e tendo desenhado no quadro o esboço apresentado na ilustração 14, aconteceu a discussão que se apresenta no seguinte extrato:

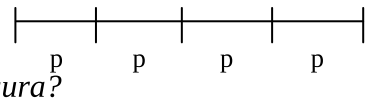
Gonçalo: A área da figura é A=4(4+p)

Rita.: O lado da figura é 4p.

Gonçalo: Não, é 4+p. 4p é outra coisa…

Professora: Entendeste Bruna?

Rita: Não…

Professora: 4p é 

[desenhei no quadro]. É isto que está na figura?

Rita: Não… Ah!.. já entendi!..

[registo de aula, 17 de Março]

Através desta intervenção da aluna, percebi que continuam a existir dificuldades com operações algébricas, optando por elucidá-la recorrendo à geometria.

Na resolução da ilustração 15, vemos como a aluna aplica erradamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição o que pode ter resultado da simples memorização das propriedades das operações com polinómios. É de chamar a atenção que esta tarefa tinha as figuras geométricas para que os alunos pudessem compreender com mais facilidade as expressões que tinham de obter.

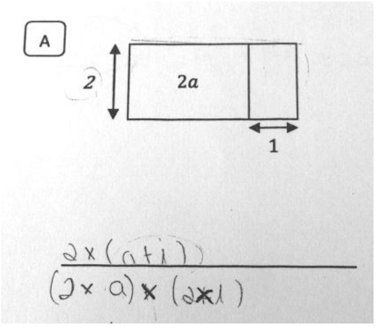


Ilustração 15 - Resolução da Rita da questão A da ficha nº1

A aluna teve dificuldade em aplicar corretamente a propriedade distributiva da multiplicação, não compreendendo que $2\times(a+1)$ é equivalente a $(2\times a) + (2\times 1)$ e não $(2\times a) \times (2\times 1)$.

As dificuldades com as operações com polinómios não aconteceram apenas com esta aluna, são muito comuns e de diferentes tipos. Vejamos mais alguns exemplos. Na resolução apresentada na ilustração 16, vemos que a aluna ignora as propriedades operatórias envolvendo potências, atente-se nas ligações assinaladas a vermelho:

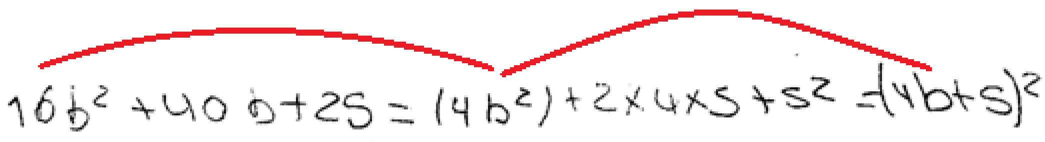


Ilustração 16 - Resolução da Mafalda da questão 2 da ficha nº2

É verdade que o primeiro e o terceiro membros desta dupla igualdade, são expressões equivalentes, no entanto, no segundo membro a aluna toma como verdade que $16b^2=(4b^2)$, e no terceiro membro que $4b^2 = (4b)^2$, ignorando as regras operatórias com potências.

Na Ilustração 17 apresento outro erro, cometido pela mesma aluna, em que mais uma vez mostra que não domina os casos notáveis da multiplicação:

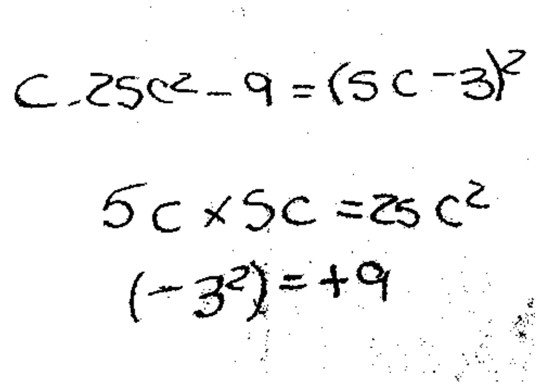


Ilustração 17 - Resolução da Mafalda da questão 2 da ficha nº 2

Vê-se aqui que a aluna admite a igualdade entre o primeiro e o segundo membro da primeira equação tendo o cuidado de justificar o seu raciocínio com a segunda e a terceira igualdades que escreveu.

Outra das dificuldades manifestadas pelos alunos resulta do uso inadequado da simbologia. É algo frequente ver que os alunos ignoram a importância da utilização dos parêntesis, mesmo que depois apliquem corretamente a propriedade distributiva da multiplicação. Exemplo disso são as resoluções apresentadas nas ilustrações 18 e 19.

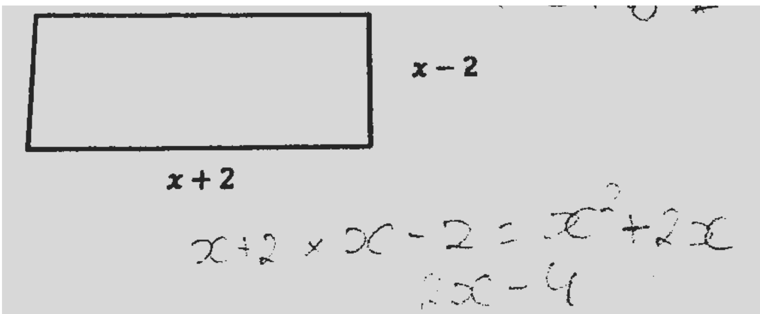


Ilustração 18 - Resolução da Débora da Questão 1 da ficha nº 2

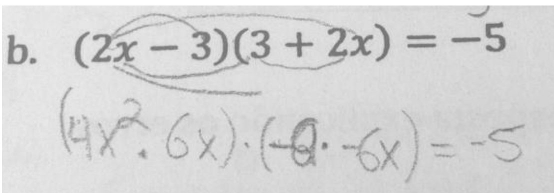


Ilustração 19 - Resolução da Mariana da questão 3b) da ficha nº4

Na resolução apresentada na ilustração 19, a aluna considera que $x+2\times x-2=x^2+2x$, quando, na verdade, $x+2\times x-2=x+2x-2=3x-2$. Como professora compreendo que o que a aluna queria escrever era $(x+2)\times(x-2)=x^2+2x$, no entanto houve um 'desprezo' pela simbologia que, neste caso, não trouxe grandes dissabores, mas que, mais tarde, poderá trazer. Na resolução apresentada na ilustração 20, a aluna aplica a propriedade distributiva da multiplicação de forma incorreta indicando que $(2x-3)(3+2x)=-5$ é equivalente a $(4x^2.6x).(-9.-6x)=-5$. Embora multiplica termo a termo corretamente, em vez de adicionar ou subtrair os produtos obtidos, multiplica-os:

É também curioso referir que ao inquirir os alunos sobre o uso desadequado dos parêntesis os alunos desvalorizam-nos completamente, veja-se um excerto de aula, em que, ao reparar que a aluna estava a fatorizar uma expressão sem fazer uso de parêntesis, a inquiro:

Professora: Então, Débora, não colocas os parêntesis?

Débora: Não, 'stôra. Não são precisos.

[registo de aula, 18 de Março]

É de chamar a atenção que, neste caso, era, de facto, necessária a utilização dos parêntesis. No entanto, a aluna desvalorizou a sua utilização. Por isso, considero indispensável reforçar a importância do seu uso adequado, assim como de qualquer símbolo ou regra algébrica, visto que, mais tarde, a utilização inadequada destes símbolos pode trazer dificuldades acrescidas.

Mas nem só o desrespeito da simbologia traz problemas aos alunos, muitas vezes os alunos aplicam regras algébricas de forma errada. Não tendo compreendido as regras em causa, os alunos tendem a reproduzi-las sem compreensão, o que muitas vezes leva a erros e dificuldades na resolução das equações de 2.º grau. Exemplo disto é a resolução apresentada na ilustração 20, onde o aluno opera de forma errada com os monómios -3 e 2x, ficando depois bloqueado na resolução da equação.

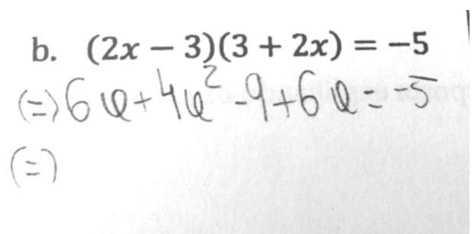


Ilustração 20 - Resolução de Vítor da questão 3b) da ficha nº4

Vê-se que o aluno considera que *-3×2x=6x*, o que impede o anulamento dos monómios de grau um o que poderá ter levado ao bloqueio do aluno. Ao escrever a equação a partir da que foi dada, o aluno encontra-se perante uma equação de 2.º grau completa que ainda não tem ‘ferramentas’ para resolver. Portanto, mais uma vez, a dificuldade ao operar com polinómios produz erros na resolução de equações de 2.º grau.

Um erro do mesmo tipo é apresentado na ilustração 21, onde vemos que o aluno aplica a propriedade distributiva incorretamente, obtendo, com o erro, uma equação de 1.º grau (e não de 2.º grau). Apesar de o aluno assinalar bem as ‘ligações’ habituais na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação que tem de fazer, as operações são realizadas incorretamente, o que mostra que o aluno não compreende a propriedade a que está a recorrer.

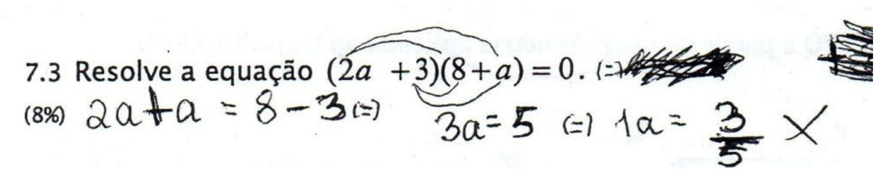


Ilustração 21 - Resolução do Fernando da questão 7.3 do teste de 12 de Maio

Apresento de seguida a resolução de uma equação em que a aluna aplica corretamente a propriedade distributiva da multiplicação:

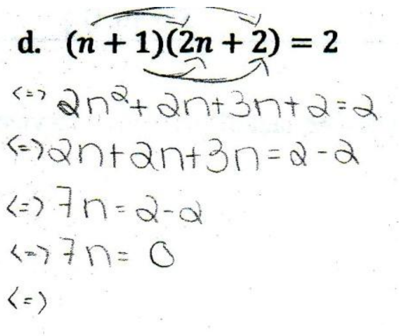


Ilustração 22 - Resolução da Carla da questão 3d) da ficha nº4

Repare-se, no entanto, que do primeiro para o segundo passo da sua resolução $2n^2$ passou a 2n, passagens como esta evidenciam mais um dos erros cometidos frequentemente pelos alunos aquando da realização de questões que envolvam operações com polinómios. Como tive a oportunidade de referir no início deste trabalho, muitos autores indicam a dificuldade com as operações com polinómios como um dos motivos que dificultam a compreensão das equações de 2.º grau.

Uma outra dificuldade que os alunos têm é entender que o produto de uma incógnita por ela própria é o mesmo que a incógnita elevada a dois, como podemos ver no registo de aula seguinte, em que ao tentarmos factorizar uma expressão recorrendo a um caso notável, um aluno intervém:

Francisco: B vezes B é B.

Professora: 3 vezes 3 é 3?

Francisco: Não, mas 1 vezes 1 é 1.

Professora: E consegues fazer isso com todos os números?

Francisco: Não.

[registo de aula, 17 de Março]

Na resolução apresentada na ilustração 23, surge outro erro frequente nos alunos no que diz respeito às operações com polinómios:

Ilustração 23 - Resolução da Carla da questão 7.3 do teste de 12 de Maio

Como se pode observar na ilustração 23, a aluna, estando confrontada com um produto de polinómios, para além de aplicar a propriedade distributiva da multiplicação de forma incorreta, considera que $2a \times a = a$ (erro muito comum que eu já referi). Observei durante as aulas que os alunos tendem a ter relutância em tentar compreender a propriedade distributiva da multiplicação e preferem vê-la apenas como uma regra que devem seguir. Esta tendência causa-lhes depois dificuldades na resolução de equações de 2.º grau.

Tal como já mencionei anteriormente, os alunos têm dificuldade em reconhecer que $B \times B = B^2$. Na resolução apresentada na ilustração 24, reparamos que quando começou a resolução a aluna poderá ter aplicado corretamente a propriedade distributiva da multiplicação - repare-se que, aparentemente, a parte literal do monómio 2a estava elevada a um valor que a aluna depois riscou:

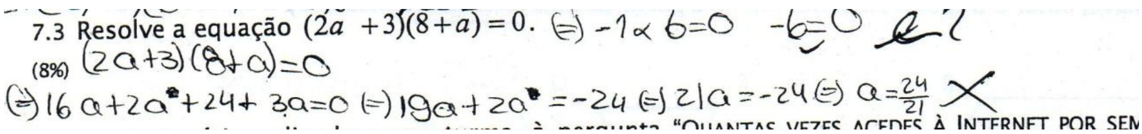


Ilustração 24 - Resolução da Raquel da questão 7.3 do teste de 12 de Maio

Muito provavelmente, ao não conseguir prosseguir no processo de resolução da equação, a aluna optou por alterar os valores obtidos, o que, do meu ponto de vista, mostra que não atribuiu significado às operações que realizou.

Veja-se ainda o caso da resolução do Alberto:

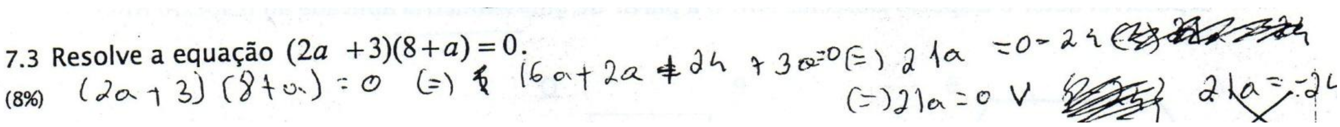


Ilustração 25 - Resolução do Alberto da questão 7.3 do teste de 12 de Maio

Este aluno aplica a propriedade distributiva da multiplicação corretamente mas, tal como nos casos anteriores, ao multiplicar 2a por a, escreve que o resultado deste produto é 2a. O erro deste aluno mostra, mais uma vez, a dificuldade que os alunos têm em compreender que $2a\times a=2a^2$.

Nos registos que fiz pós-aula, assinalei que alguns alunos cometem eros do tipo $(2a)^2=2a^2$ *ou* $4a^2=4a$. Parece-me então que os alunos assumem que se o valor de uma incógnita é a letra que a representa, então uma potência desse mesmo valor é também uma incógnita, logo, do ponto de vista de alguns dos alunos, uma incógnita e uma sua potência, têm exatamente o mesmo valor. Como podemos ver nas ilustrações 23, 24 e 25. A representação apresentada na ilustração 26 também evidencia isto. A aluna, ao resolver a equação $3a-2a^2=0$, assume que $2a^2=4a$.

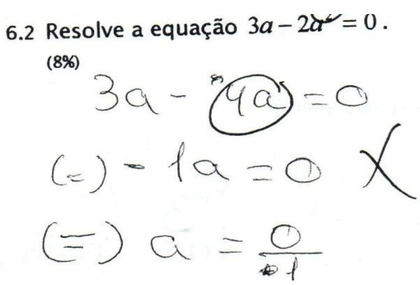


Ilustração 26 - Resolução da Débora da questão 6.2 do teste de 20 de Maio

Além destes exemplos de dificuldades com operações com polinómios, durante as aulas foi também muito frequente a assunção, por parte dos alunos, que

$b^2=2b$. No entanto, nas produções escritas dos alunos não se verificou nenhum exemplo escrito.

Nas resoluções apresentadas nas ilustrações 24 e 25, vimos que os alunos fizeram as operações com polinómios incorretamente. É verdade que as operações foram erradamente aplicadas, mas terá sido esse o único motivo que provocou o erro destes alunos? Parece-me que não. O insucesso destas resoluções, em particular, prende-se também com a dificuldade em reconhecer um polinómio fatorizado e igualado a zero como uma equação em que se pode já aplicar a lei do anulamento do produto. Nestas resoluções, os alunos, ao observarem o primeiro membro fatorizado e o zero no segundo membro, em vez de aplicarem a lei do anulamento do produto, aplicaram a propriedade distributiva da multiplicação no primeiro membro. Então, a Raquel (ilustração24) obtém um polinómio de 2.º grau cuja resolução ainda não sabe fazer e opta por manipular os expoentes dos monómios, como já vimos atrás e o Alberto (ilustração 25) multiplica monómios incorretamente. Vejamos o seguinte episódio de aula que exemplifica esta dificuldade:

Fernando: [escreve no quadro]

$$(5n+3)^2=0$$

$$(5m-3)(5m-3)=0$$

$$5m-3=0 \lor 5m-3=0$$

$$5m=3 \lor 5m=3$$

$$m=3/5 \quad \lor m=3/5$$

$$C.S=\{3/5\}$$

Madalena: Porque não aplicaste a [propriedade] distributiva [da multiplicação]?

Fernando: Porque tentei e tornou-se confuso. Porque cheguei a meio e não sabia o que fazer.

Professora: Vamos aplicar, aqui ao lado, a [propriedade] distributiva [da multiplicação]. (e desloquei-me até ao quadro)

$$25m^2-30m+9=0$$

Professora: E agora?

Madalena: Colocamos o m em evidência.

Professora: O 9 é divisível por m?

Madalena: Não.

Fernando: Tínhamos de passar o 9 para o outro lado.

Professora: Muito bem, então m(25m-30)=-9, e agora?

Madalena: Então, m=-9 ∨25m-30=-9.

Professora: Quando é que estamos em condições de usar a Lei do Anulamento do Produto?

Turma: Quando está igual a zero.

Professora: Podemos resolver assim a equação, Madalena?

Madalena: Não.

Professora: Então, turma, se um dos membros já está fatorizado e igualado a zero, faz sentido voltar atrás?

Turma: Não.

[registo de aula, 26 de Março]

Neste pequeno excerto de aula notamos como a aluna tem a necessidade de recorrer à propriedade distributiva da multiplicação mostrando. Daqui se vê que alguns alunos têm dificuldade em compreender o processo de resolução de uma equação de 2.º grau. Ao não compreenderem este processo, os alunos vêm-no como uma rotina que têm de cumprir: primeiro simplificar a expressão, depois fatorizar, por fim, aplicar a lei do anulamento do produto e resolver as equações daí resultantes de forma a obter as soluções da equação. Assim, os alunos sentem que se uma equação ainda tem parêntesis, estes têm de ser retirados. É, portanto, de esperar que esta confusão surja tal como surgiu na resolução apresentada na ilustração 24, onde a aluna sendo confrontada com uma expressão já fatorizada e igualada a zero opta por retirar os parêntesis da expressão, obtendo, depois, uma expressão que não consegue voltar a fatorizar para aplicar a lei do anulamento do produto.

O mesmo aconteceu com esta aluna, ilustração 27, que aplicou a propriedade distributiva e não conseguiu continuar com a resolução.

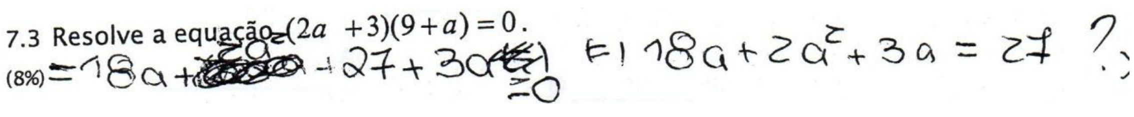


Ilustração 27 - Resolução da Luísa da questão 7.3 do teste de 12 de Maio

Quando, numa aula seguinte, questionei esta mesma aluna sobre a sua resolução, o seguinte diálogo surgiu:

Professora: Luísa, já viste a resolução desta questão [apontei para a questão 7.2 do Teste 12 de Maio]?

Luísa: Já, 'stora. Já sei como é.

Professora: E a resolução, faz sentido?

Luísa: Sim.

Professora: Então porque resolveste desta forma?

Luísa: Achei que se tinham de tirar os parêntesis!.. é o que costumamos fazer..

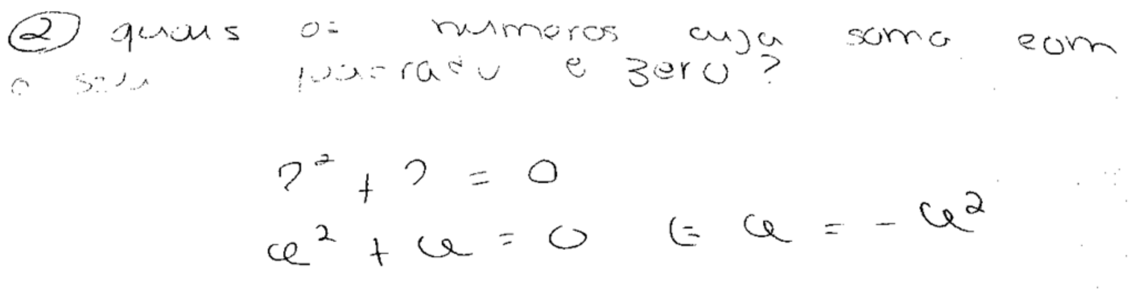
Professora: O que costumamos fazer?

Luísa: Sim, 'stora.. Quando temos uma expressão temos que tirar os parêntesis…

[registo de aula, 14 de maio]

Confirma-se então que a aluna sentiu a necessidade de retirar os parêntesis da expressão: "Achei que se tinham de tirar os parêntesis!..É o que costumamos fazer..".

Uma outra dificuldade que observei ao longo das aulas é a tendência que alguns alunos têm para resolver a equação de 2.º grau recorrendo a técnicas utilizadas na resolução de equações de primeiro grau (diga-se, isolar a incógnita no primeiro membro). A resolução apresentada na ilustração 28 é exemplo desta tendência. Nesta resolução, a aluna traduz o enunciado ("Quais os números cuja soma com o seu quadrado é zero?") por meio de uma equação mas, ao tentar resolvê-la, isola o x no primeiro membro da equação.


2) quais os numeros cuja soma com o seu quadrado é zero?

$?^2 + ? = 0$

$a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a = -a^2$

Ilustração 28 - Resolução da Joana da questão extra nº 2 da ficha nº 3

Esta questão, foi proposta por mim numa das aulas destinadas à introdução da equação de 2.º grau. Portanto, os alunos ainda não teriam conhecimento das técnicas de resolução introduzidas depois, como tal, esta aluna (ilustração 28) tenta resolver a equação utilizando as técnicas que já conhecia do ano anterior.

O mesmo tipo de erro acontece na resolução apresentada na ilustração 29, em que o aluno recorre ao procedimento de "colocar as letras" no primeiro membro da equação e os números no segundo membro.

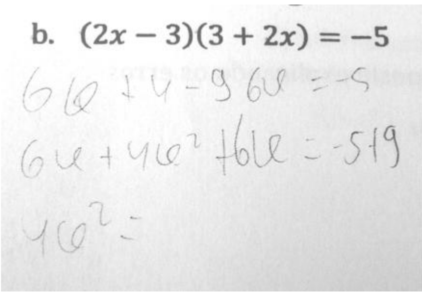


Ilustração 29 - Resolução do Francisco da questão 3b) da ficha nº 4

Ora veja-se, no primeiro passo o aluno retira os parêntesis da equação. No segundo passo o aluno opta por colocar todos os termos com incógnita no primeiro membro e no segundo membro os valores numéricos no entanto, o monómio *6x* que apresentou no final do segundo membro deveria ter sido *-6x*. Assim, no terceiro passo, o aluno isola o monómio de maior grau no primeiro membro e nada escreve no segundo, pois, tal como observei, tendo reparado que os monómios que iria passar para o segundo membro, eram, também eles, compostos por incógnitas, ficando assim sem saber o que escrever.

Um outro exemplo deste tipo de dificuldade é apresentado na resolução da ilustração 30. O aluno aplica a propriedade distributiva obtendo uma expressão que não consegue voltar a fatorizar, como tal, opta por resolver utilizando técnicas de resolução de equações de primeiro grau, como "colocar letras no primeiro membro e números no segundo".

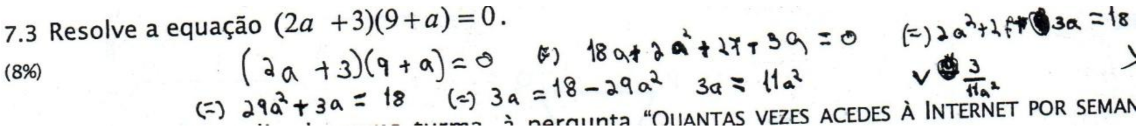


Ilustração 30 - Resolução do Rui da questão 7.3 do teste de 12 de Maio

O aluno aplica a propriedade distributiva obtendo uma expressão que não consegue voltar a fatorizar, como tal, opta por resolver utilizando técnicas de resolução de equações de primeiro grau, como "colocar letras no primeiro membro e números no segundo", mas como, neste caso, existem vários monómios compostos com incógnitas, o aluno opta por isolar a incógnita de grau um, passando o monómio de grau dois para o segundo membro da equação.

Ao não compreenderem o que estão a fazer, os alunos acabam por apenas memorizar o processo de resolução, tendo assim muito mais possibilidade de insucesso. O aluno, na ilustração 31, observa a resolução da Anabela e identifica como único erro a indicação de “e” ao invés de “ou”, não reconhecendo que a Anabela aplicou incorretamente a lei do anulamento do produto.

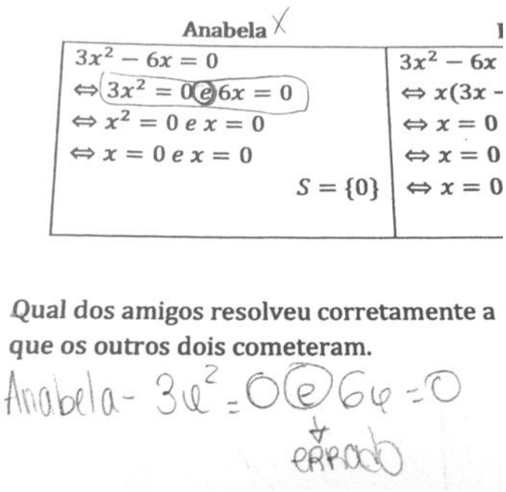


Ilustração 31 - Resolução do Vítor da questão 1 da ficha nº4

Outra das dificuldades manifestadas nos alunos é a compreensão da lei do anulamento do produto. Ao não compreenderem a lei, os alunos recorrem a ela de forma errada, dificultando a resolução da equação de 2.º grau que pretendem. Na ilustração 32 vê-se a resolução de uma questão de um aluno, em que este reconhece que está perante uma equação de 2.º grau, que deve recorrer à lei do anulamento do produto mas que reparando que o primeiro membro está já fatorizado, ignora o facto de que o segundo membro não está anulado.

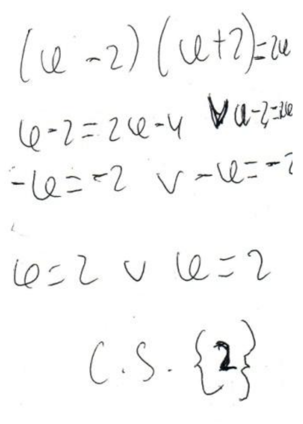


Ilustração 32 - Resolução do Francisco da questão 1.2 do mini-teste

Este é um erro frequente, neste caso, o aluno iguala ambos os fatores do primeiro membro ao segundo membro, obtendo soluções que não satisfazem a igualdade inicial.

No caso da resolução apresentada na ilustração 33, a aluna utiliza incorretamente a lei do anulamento do produto pois, apesar do segundo membro da equação estar anulado, o primeiro não está composto por fatores, o que inviabiliza a utilização da lei.

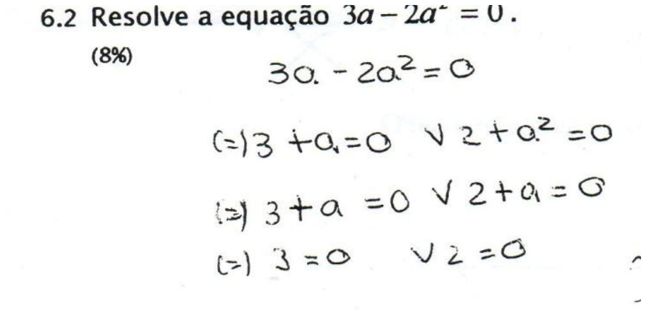


Ilustração 33 - Resolução da Mafalda da questão 6.2 do teste de 20 de Maio

Ainda assim, a aluna prossegue a sua resolução, sem compreender que para que a lei do anulamento do produto se possa aplicar, não basta que o segundo membro da equação seja zero, mas que no primeiro membro esteja representado um produto entre vários fatores.

O mesmo tipo de erro volta a surgir na resolução apresentada na resolução apresentada na ilustração 34, em que o aluno não respeita os pressupostos da lei do anulamento do produto, acabando por obter, por isso, uma solução errada para a equação proposta.

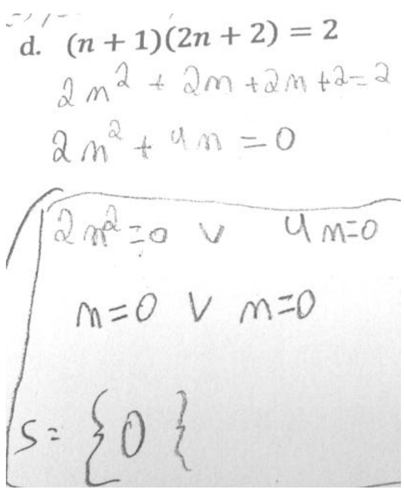


Ilustração 34 - Resolução do José da questão 3d) da ficha nº 4

O José, aplica a propriedade distributiva da multiplicação e reduz a equação à sua forma canónica. De seguida assume $2n^2$ e $4n$ como fatores de uma multiplicação e aplica a lei do anulamento do produto incorretamente.

Na resolução apresentada na ilustração 35, é interessante ver como o aluno tem a necessidade de ter a regra presente para que a consiga aplicar. O que dá a entender que o aluno não a compreende e tem a necessidade de memorizar o procedimento para o conseguir aplicar.

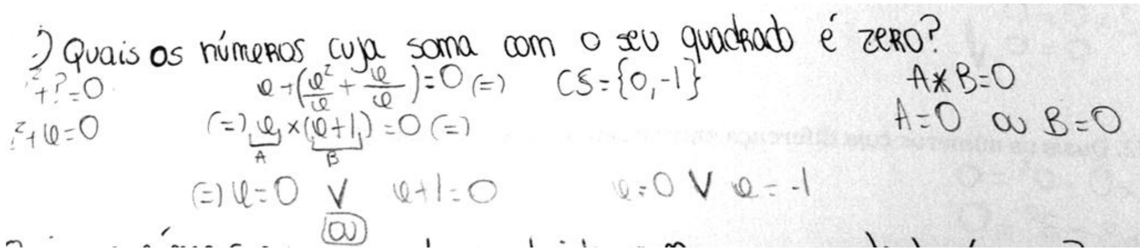


Ilustração 35 - Resolução do Vítor da questão nº 2 da ficha nº3

Destes últimos exemplos podemos ver que alguns alunos não compreendem a lei do anulamento do produto e daí não percebem em que condições a podem aplicar. Confirmando-se assim a dificuldade que os alunos têm em compreender a lei do anulamento do produto, o que lhes traz insucesso na resolução de equações de 2.º grau.

Além destas dificuldades, verifiquei que alguns alunos têm também alguma dificuldade a fatorizar polinómios. Durante as aulas dei a conhecer aos alunos dois processos de fatorização de polinómios: colocar um fator comum em evidência e o recurso aos casos notáveis da multiplicação de polinómios. Notei, durante as aulas, que os alunos não recorrem aos casos notáveis da multiplicação caso não sejam indicados a tal. Sempre que surgiu na aula a necessidade de fatorizar um polinómio envolvendo casos notáveis da multiplicação, foi necessário que a professora escrevesse no quadro os casos notáveis para que os alunos fizessem a ligação entre estes e o polinómio que teriam de fatorizar. Suponho que, por isso, quando confrontados com uma equação que envolva o recurso aos casos notáveis da multiplicação, não consigam ter sucesso na mesma. Sabendo desta dificuldade dos alunos e tendo consciência que no 9ºano os alunos irão confrontar-se com outro processo de fatorização mais abrangente (formula resolvente da equação geral da equação de 2.º grau), optei por não incluir em nenhum elemento de avaliação/classificação tarefas que envolvessem casos notáveis da multiplicação, focando-me essencialmente na avaliação da fatorização de polinómios colocando fatores em evidência. Surgindo estas dificuldades, com a fatorização de polinómios, exclusivamente durante as aulas.

Como vemos, na resolução apresentada na ilustração 36, a aluna, inicialmente, aplica o caso notável incorretamente (veja-se que a aluna riscou a segunda equação realizada). Estando perto da aluna neste momento, observei que após o confronto com a resolução da colega do lado, corrigiu a sua resolução. Tendo este confronto acontecido de imediato, não posso garantir o que teria acontecido de seguida, mas posso supor fortemente que se não tivesse corrigido a fatorização, a aluna teria resolvido a equação de forma incorreta.

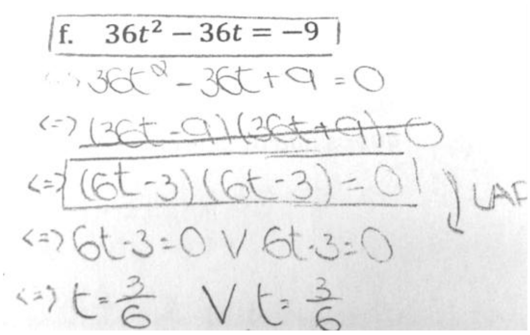


Ilustração 36 - Resolução da Carla da questão 3f) da ficha nº 4

As minhas primeiras aulas foram dedicadas a processos de fatorização e realizei, com contentamento, que a turma recebeu este processo com alguma facilidade. No entanto, há sempre alguns alunos que não compreendem o processo de fatorização em causa, ficando limitados na resolução de equações de 2.º grau. Um exemplo disto é a resolução apresentada na ilustração 37, em que a aluna faz incorretamente a fatorização do polinómio.

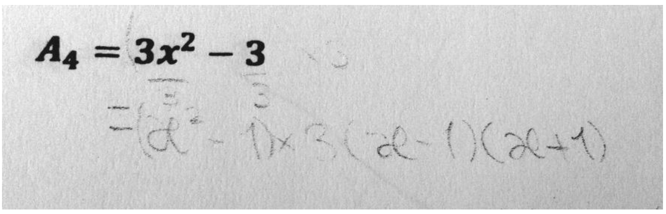


Ilustração 37 - Resolução da Alexandra da questão nº1 da ficha nº2

Tendo sido esta questão realizada e corrigida durante a aula, suponho que a resolução seja o resultado do que a aluna copiou do quadro, visto que a resolução no quadro não ficou feita desta forma, posso supor que a aluna registou na sua ficha este erro que resulta da falta de compreensão do processo de fatorização utilizado.

É também frequente que os alunos, mesmo entendendo o que deverão fazer, não o consigam cumprir devido à dificuldade que têm em fatorizar polinómios, como se pode ver na resolução do exercício do teste de 12 de Maio apresentado na ilustração 38:

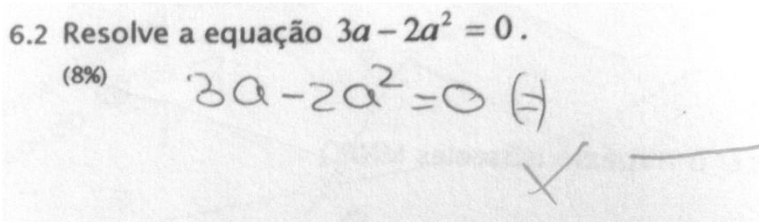


Ilustração 38 - Resolução da Raquel da questão 6.2 do teste de 20 de Maio

Ao reparar que a aluna não teria concluído o exercício, decidi questioná-la numa aula seguinte muito brevemente pois fiquei sem compreender porque motivo a aluna não o teria terminado, vou tomar a liberdade de reproduzir um discurso semelhante ao que tive com a aluna na altura, baseado nos meus registos:

Professora: Raquel, não tiveste tempo para concluir este exercício?
Raquel: Tive. Deixei porque não sabia.
Professora: Não sabias o quê? O que tinhas de fazer?
Raquel: Não. Eu sabia que tinha de usar a lei [do anulamento do produto], mas não sabia como porque estava lá uma soma.
Professora: Tens razão. E o que tinha de lá estar?
Raquel: Um vezes…
Professora: Então tinhas de fatorizar. Como é que podias fatorizar?
Raquel: Não sei..

[registo de aula, 21 de Maio]

Depois deste momento relembrei o processo de fatorização à aluna. Não ficou muito claro para mim qual a dificuldade exata que a aluna sentiu neste processo de fatorização. No entanto, tendo em conta as dificuldades algébricas dos alunos posso supor que terá sido difícil para a aluna identificar o fator em comum.

Muitas vezes senti, durante as aulas, que a maior dificuldade para os alunos neste processo é perceber que cada monómio pode ser decomposto em fatores e que esse monómio ao ser dividido e multiplicado pelo mesmo fator, permanece igual. É também importante verificar que colocar fatores numéricos em evidência causa menos dúvidas nos alunos do que realizar o mesmo processo com fatores algébricos. Penso que esta facilidade numérica se deve também ao facto de que os alunos reconhecem números como múltiplos e divisores entre eles, mas têm alguma resistência em adotar o mesmo raciocínio para valores algébricos. Na ilustração 39, é apresentada a resolução de uma aluno que, apesar de identificar corretamente os fatores em comum, não consegue, depois, fatorizar corretamente o polinómio. Tendo em conta as pesquisas que fiz e não tendo entrevistado o aluno, suponho que esta fatorização é mal sucedida devido à dificuldade que é compreender o conceito de múltiplo e divisor quando tratamos de valores algébricos.

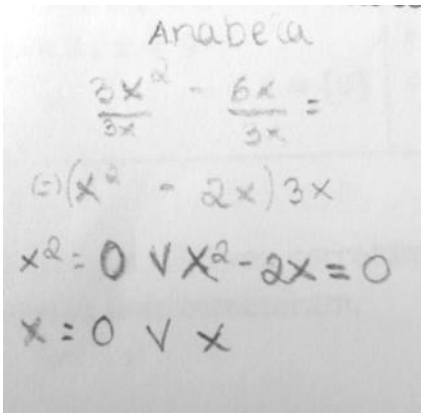


Ilustração 39 - Resolução do Fernando da questão nº 1 da ficha nº4

Como se vê os alunos, ao não compreenderem os processos envolvidos na resolução de uma equação de 2.º grau, acabam por ver uma equação apenas como um exercício matemático a que têm de dar uma resposta. E desta forma tentam adaptar os seus conhecimentos, não respeitando e compreendendo regras.

Apesar das dificuldades apresentadas, estes são alunos que, na sua maioria, tentam sempre apresentar uma resolução para a equação.

Conclusões

Apesar de as equações terem sido introduzidas no ano letivo anterior, é de esperar que os alunos tragam com eles ainda algumas dificuldades. Sabe-se, pela investigação já realizada, que o estudo da Álgebra, nomeadamente o estudo das equações, trazem dificuldades aos alunos, devido à sua natureza mais abstrata do que a Aritmética, e ao aparecimentos de conceitos complexos e de nova simbologia ou de novos significados para símbolos já conhecidos. Para que conseguisse perceber um pouco melhor estas dificuldades, estabeleci como objetivo do meu trabalho "Compreender as principais dificuldades que os alunos manifestam na resolução de equações de 2.º grau" e optei por formular as seguintes questões: "Que significados os alunos atribuem à solução da equação quadrática em contextos diversificados?" e "Como procedem os alunos para resolver equações de 2.º grau?". É, agora, chegado o momento de dar resposta a essas questões. Para que conseguisse encontrar respostas, a par da bibliografia consultada, das discussões e reflexões que fiz com os meus orientadores e com a minha colega, também analisei as produções escritas e interações dos alunos da turma C do 8.º ano da Escola Secundária Padre Alberto Neto.

"Que significados os alunos atribuem à solução da equação de 2.º grau?"

No ano letivo anterior, os alunos tiveram o primeiro contato com as equações e com o processo canónico para a sua resolução. Encontrar a solução de uma equação é um processo complicado para os alunos e a dificuldade aumenta quando se trata de entender o significado desta solução. Segundo Vayavutjamai & Clements (2006), os alunos não compreendem que o valor ou valores que são solução de uma equação são os valores que quando a incógnita é substituída por eles na igualdade inicial, se obtém uma igualdade verdadeira. Esta dificuldade produz erros na compreensão do significado da solução de uma equação.

Ochoviet & Oçtak (2009), afirmam que os alunos, ao verem o sinal de igual numa equação, pensam quês lhes está a ser pedido para apresentar o resultado da ou das operações que estão presente no primeiro membro, no segundo membro. Este tipo de significado foi atribuído por alguns alunos no decorrer das aulas que lecionei. Alguns alunos têm dificuldade em afastar-se do significado do sinal de igual que aprenderam no 1.º e 2.º ciclo, o que, agora lhes causa dificuldades. Faço notar no entanto que, na turma que lecionei, isto se verificou apenas em alunos com muitas dificuldades a matemática, o que me faz pensar que, no 8.º ano, este erro só acontecerá em alunos que, no 7.º ano, compreenderam muito pouco das equações. Verifiquei ainda que alguns alunos assumem que a solução de uma equação como o valor ou valores que obtêm para a incógnita no passo final do processo de resolução, não compreendendo que solução ou soluções de uma equação são os valores que transformam a igualdade inicial numa identidade, quando a incógnita é substituída. Outra das dificuldades na compreensão do significado de solução de uma equação, nomeadamente uma equação de 2.º grau, é, segundo Vaiavutjamai, Ellerton & Clements(2006), compreender que uma incógnita colocada diversas vezes numa mesma equação, representa o mesmo valor, o que verifiquei junto do alunos da turma. Os alunos tendem a considerar que uma incógnita pode assumir valores diferentes quando aparece várias vezes numa mesma equação e muitas vezes tendem a substituir a incógnita por valores diferentes, o que muitas vezes tem que ver com o facto de a solução ter mais do que uma solução. Para além disto, verifiquei que foi comum entre os meus alunos eles desenvolverem uma analogia com as equações do 1.º grau, considerando que teriam resolvido uma dada equação do 2.º grau logo que encontrassem um valor para a solução. Isto pode dever-se ao facto de as equações do 1.º grau estarem ainda muito próximas.

Estes são os significados que os alunos atribuem à solução da equação de 2.º grau que encontrei. É importante que eles sejam reconhecidos e compreendidos pelo professor para que, nas suas aulas, possa providenciar aos alunos tarefas em que estas dificuldades sejam exploradas e ultrapassadas, pois, só assim, os alunos conseguirão compreender o que é a solução de uma equação, nomeadamente do 2.º grau.

"Como procedem os alunos para resolver equações de 2.º grau?"

Mais uma vez, é importante reforçar que o estudo das equações se iniciou no ano letivo anterior, com as equações de 1.º grau. Desta forma, os procedimentos que os alunos aprenderam para resolver este tipo de equações influenciam os procedimentos do presente ano letivo para as equações de 2.º grau. E, da mesma forma, algumas dificuldades na resolução de equações persistem sendo que, este ano, a estas acrescem dificuldades específicas das equações de 2.º grau.

Face às equações que os alunos aprenderam no ano anterior, as equações de 2.º grau são mais complexas por isso, as dificuldades no seu processo de resolução aumentam, ao que ainda acresce as dificuldades que os alunos têm em operar com polinómios. Ao longo das aulas, muitas vezes os alunos tiveram dificuldade em resolver as equações corretamente devido a erros provenientes das operações com polinómios. Verifiquei que a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação com polinómios traz algumas dificuldades aos alunos e, muitas vezes, por sentirem que têm que apresentar ‘qualquer coisa’, os alunos desrespeitam as regras das operações. O mesmo acontece quando os alunos têm de fatorizar uma expressão. Tanto a técnica de ‘colocar um fator em evidência’, como a de fatorizar recorrendo aos casos notáveis da multiplicação, causam estranheza aos alunos, não conseguindo fatorizar expressões com a compreensão e eficácia que gostaríamos. É por isso muito importante reforçar que as operações com polinómios devem ter uma especial atenção por parte dos professores, dando estes tempo e oportunidade aos alunos para que compreendam os processos e regras envolvidas nas operações com polinómios.

É de salientar que alguns alunos, principalmente em tarefas introdutórias, optam por procedimentos utilizados no processo de resolução das equações de primeiro grau: “colocar as letras no primeiro membro e os números no segundo”. Na verdade, a meu ver, este comportamento é expetável em tarefas de introdução mas não é de esperar quando os alunos já tomaram conhecimento de técnicas de resolução específicas das equações de 2.º grau, mostrando que não compreenderam os procedimentos. Vaiavutjamai, Ellerton & Clements(2006), dizem-nos também que outro dos procedimentos que os alunos seguem ao resolver as equações de 2.º grau é, quando perante uma equação cujo primeiro membro está já fatorizado e o segundo é zero, ‘retirar’ os parêntesis do primeiro membro da equação. Ou seja, aplicam a propriedade distributiva da multiplicação obtendo um polinómio que, este ano, muitas das vezes, não têm ‘ferramentas’ para voltar a fatorizar. Assim, não conseguem concluir corretamente o processo de resolução da equação, o que, mais uma vez, mostra que não compreenderam o processo.

Ochoviet e Oktaç (2009), afirmam também que muitas vezes os alunos resolvem incorretamente equações de 2.º grau por não compreenderem a lei do anulamento do produto. Durante as aulas, verifiquei que os alunos não compreendem que esta lei, indispensável à resolução de muitas equações de 2.º grau que se trabalham no 8.º ano, ao ser indevidamente utilizada leva a erros na resolução da equação. É comum ver que os alunos aplicam a lei do anulamento do produto sem que o segundo membro seja zero e que também a aplicam quando o primeiro membro não está fatorizado.

É por isso muito importante que os alunos compreendam os procedimentos e regras necessários à resolução de equações de 2.º grau. A mimetização de processos sem compreensão não promove o pensamento algébrico e pode levantar dificuldades sérias a essa compreensão, *Vayavutjamai & Clements (2006).*

5 - Reflexão final

Ao longo deste ano, como já tive oportunidade de referir, passei por muitas experiências novas das quais retive conhecimentos importantes que contribuíram para o meu crescimento enquanto futura professora e também a nível pessoal. Ter uma turma à minha responsabilidade, mesmo que por pouco tempo, fez com que tivesse de passar pela experiência de ser professora com tudo o que ela engloba: ensinar; refletir antes, durante e depois das aulas; criar materiais de trabalho para os alunos; trabalhar em parceria com outros colegas; conhecer os alunos; entre tantas outras coisas. Foi, para mim, muito importante conhecer uma turma e trabalhar com e para ela, para que as aprendizagens que queria promover lhes fizessem sentido.

Conhecer uma turma foi uma experiência inesquecível. Estes alunos receberam-me, cada um à sua maneira, como mais uma professora. É de salientar que estes alunos tinham já um professor e que poderiam ter rejeitado a ideia de ter outro professor na sala, no entanto, isso não aconteceu e senti sempre que tentaram participar e interagir comigo.

As aulas que lecionei não foram livres de erros. Mas considero que tanto os momentos bons, como os menos bons, foram impulsionadores de aprendizagem e permitiram que me aproximasse mais do meu ideal de professora. Desta forma, pude experimentar várias estratégias e dinâmicas de aula para que me conhecesse melhor enquanto professora, na esperança de que a minha qualidade de ensino possa aumentar. Nada disto teria sido possível sem a preciosa ajuda do meu professor cooperante, colega de estágio e Professores orientadores, pois com eles percebi quão importante é partilhar experiências e refletir conjuntamente.

Aprendi ainda a importância que a investigação pode ter na minha futura profissão. Procurar saber o que a investigação já produziu é muito importante, pois assim, conseguimos ter uma perceção mais alargada largada e aprofundada dos problemas do ensino e da aprendizagem, neste caso, da Matemática e de como podemos fazer melhor o nosso trabalho. A par desta procura, aprendi também quão útil é para o professor fazer as suas próprias investigações. Questionar e procurar respostas, analisando o trabalho dos seus alunos, pode ajudar o professor a compreender melhor os procedimentos dos alunos, os seus êxitos e as suas dificuldades e assim, desempenhar melhor o seu papel, proporcionando uma melhoria na qualidade da aprendizagem realizada pelos alunos. Este ano foi prova disso, pensar em questões e tentar dar-lhes resposta permitiu que estivesse mais alerta para as aprendizagens que poderiam estar a ser realizadas pelos alunos e para as aprendizagens que eu pretendia que os alunos adquirissem.

Reforcei ainda a minha ideia de que a Álgebra é um dos temas matemáticos que causa mais dificuldades nos alunos. Lidar com símbolos e manipulá-los traz muitas dificuldades aos alunos e é absolutamente necessário que o professor faça um esforço para que os alunos atribuam o significado correto aos entes algébricos que têm de aprender. Nomeadamente, no ensino das equações de 2.º grau é muito importante reforçar que as suas soluções são os valores que, substituídos na incógnita, fazem com que a igualdade inicial, e suas equivalentes, se torne numa identidade; que as operações com polinómios devem ser compreendidas pelos alunos e não apenas memorizadas, assim como todas as regras e princípios de equivalência a que se recorre durante a resolução de uma equação; que o processo de resolução de uma equação de 2.º grau deve ter significado para os alunos ao invés de ser apenas memorizado e mimetizado. Por fim, é importante que todos os conceitos sejam dados a explorar aos alunos antes de serem ensinados como definições ou regras; é importante que os alunos aprendam a fazer álgebra e isso implica que eles próprios deem o sentido correto aos conceitos, regras ou procedimentos.

Por fim, pretendo que o meu percurso profissional esteja sempre envolto em reflexão, investigação e partilha, para que consiga construir ou utilizar as tarefas que mais se adequem aos alunos com que irei trabalhar para que eles compreendam e deem o significado correto à matemática, proporcionando-lhes uma aprendizagem com mais qualidade e satisfação.

Referências Bibliográficas

- Banchoff, T. (2008). Algebraic thinking and geometric thinking in school mathematics, Brow University. Rhode Island
- David Tall & Rosana Nogueira de Lima (2010). An example of the fragility of a procedural approach to solving equations. (Draft.)
- David Tall, Rosana Nogueira de Lima & Lulu Healy (2014). Evolving a Three-world Framework for Solving Algebraic Equations in the Light of What a Student Has Met Before. *Journal of Mathematical Behavior*, 34, 1-13.
  http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3410/1/07-Ponte%20etc%20%28Eq2G%29%20Quadrante%2016-1.pdf
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics 12*, 317-326
  https://oak.ucc.nau.edu/smg224/401pdfs/algebrareadings/kieran1.pdf
- ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. (http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf)
- NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática Escolar*. (Trad.) Lisboa: APM. (obra original publicada em 2000).
- Ochoviet, C & Oktaç, A. (2009). If A.B=0 then A=0 or B=0?. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *Vol. 6*, pp 113 -136.
- Ponte, J.P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.
- Ponte, João P.; Salvado, C; Fraga, Ana; Santos, Teresa; Mosquito, Elisa. (2007). Equações do 2.º grau do fim do século XIX ao início do século XXI: Uma análise de sete manuais escolares. *Quadrante 16*, 1, pp 111 - 145.
- Ponte. J. (2004). *As* equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História de Matemática Vol. 4* nº8 *pp.149-170*
- Rosana Nogueira de Lima and David Tall (2006). What does equation mean? A brainstorm of the concept.*Third International Conference on the Teaching of Mathematics*, Istanbul
- Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. Em, Menezes, Santos, Gomes e Rodrigues (org.) *Avaliação em matemática: problemas e desafios*.Viseu: SEM-SPCE

- Usiskin, Z. (1999). *Why is Algebra important to learn (Teacher, this one's for your students!). Em* Algebraic thinking - Grade k-12.
- Vaiavutjamai, P, Clements, M.(2006). *Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations.* Mathematics Educational Research Journal, vol. 18 nº 1. p 47-77.
- Vaiyavutjamai, P, Ellerton, N. & Clements, M. (2006). *Student's attempts to solve two elementary quadratic equations - A study in three nations.*

Anexos

Anexo I – Plano de aula 1 - 17 de Março de 2013

Tema: Álgebra

Tópico: Equações

Subtópico: Operações com polinómios

Conteúdo/conceitos:

- Operações com polinómios: fatorização
- Equivalência entre expressões algébricas

Pré-Requisitos:

- Expressões algébrica
- Polinómio de 2.º grau
- Propriedade distributiva da multiplicação entre polinómios
- Conceito de área

Objetivos específicos:

- Compreender a equivalência entre expressões fatorizadas e em forma de polinómio com auxílio da geometria
- Introdução de nomenclatura inerente À fatorização de polinómios
- Reconhecer a fatorização como operação entre polinómios
- Compreender processos algébricos de fatorização:
  Compreender e aplicar o processo de fatorização de colocar um fator em evidência

  Introduzir fatorização fazendo recurso a casos notáveis

Dificuldades esperadas:

- Manipulação inversa de expressões algébricas: espera-se que os alunos não reconheçam facilmente os processos de fatorização como operação entre polinómios
- Reconhecer equivalência entre expressões algébricas
- Domínio dos casos notáveis da multiplicação

Recursos:

- Ficha de trabalho: "Polinómios e fatorização"
- Tarefa Extra
- Quadro e marcadores coloridos

Desenvolvimento de Aula

1. Entrada em aula e registo do exemplo no quadro (5 min)
2. Apresentação do exemplo e sua resolução em conjunto com a turma (5min)
   - É importante que, neste momento, se motive todos os alunos a participar na tarefa.
   - Aproveitarei para chamar a intervir alunos com mais dificuldades para que possam compreender melhor a tarefa que vamos trabalhar a seguir e para que se sintam integrados na aula.
   - Pedir pelo menos duas expressões para representar a área da figura desenhada no quadro
   - Deverão ficar registadas no quadro as expressões $A = 5a + 15$ e $A = 5(a + 3)$, chamando sempre a atenção para a equivalência entre elas
   - A conexão com a geometria deve ser feita sempre que possível para facilitar a compreensão da equivalência das expressões

3. Distribuição das fichas de trabalho e esclarecimento do enunciado (5min)

4. Resolução da ficha de trabalho pelos alunos em díade (15 min)
    - Durante este momento, circularei pela sala de aula tirando dúvidas aos alunos e observando as suas resoluções, selecionando as díades que irei chamar durante a discussão
    - Aproveitarei também este momento para, rapidamente, registar no quadro as figuras da ficha de trabalho de forma a não perder tempo durante a discussão da mesma.
5. Discussão/ Correção da tarefa em grande grupo (30 min)
    - Discussão conduzida por mim com o contributo dos alunos. Os alunos deverão ser responsáveis pela totalidade dos registos no quadro sendo a professora responsável por questionar e conduzir as dúvidas de forma a que os registos no quadro se apresentem sem erros.
    - Pedir as expressões a alunos diferentes e questionar sobre a existência de dúvidas no resto da turma.
    - Deve ser feita a resolução algébrica do exercício no quadro em conjunto com os alunos.
    - Depois de registar no quadro as expressões dadas pelos alunos deverei questionar que processos algébricos foram realizados. Os alunos não terão dificuldade em justificar a passagem da expressão fatorizada para polinómio, recorrendo à propriedade distributiva; a passagem inversa deve ser questionada pela professora e resolvida em grande grupo.
    - A expressão "colocar um fator em evidência " deve surgir logo no primeiro exercício da tarefa.
    - O processo de colocar um fator em- evidência será explicado da seguinte forma: "Dividir ambos os termos por x e multiplicar por x" e deverão surgir no quadro, para todas as alíneas, expressões do tipo:

$$A = 2a + 2$$
$$A = 2\left(\frac{2a}{2} + \frac{2}{2}\right)$$
$$A = 2(a+1)$$

Ou

$$A = 2x^2 + x$$
$$A = 2xx + x$$
$$A = x\left(\frac{2x\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)$$
$$A = x(2x + x)$$

Nota: Colocar uma incógnita em evidência provocará duvidas acrescidas

    - Esclarecer, no final, que agora os alunos já sabem transformar um polinómio num produto de fatores.

6. Registo no quadro da tarefa extra e resolução dos alunos em díade (10 min)
    - Registo dos casos notáveis da multiplicação no quadro ao lado
    - Esclarecimento de dúvidas junto dos alunos
    - Esta tarefa pretende apresentar aos alunos a fatorização de polinómios recorrendo a casos notáveis da multiplicação.
    - A tarefa extra deverá ser registada pelos alunos no verso da ficha, essa indicação deve ser dada
7. Discussão e correção da tarefa em grande grupo (10min)
    - Os alunos não deverão ter dificuldade em justificar a equivalência entre as

expressões recorrendo à propriedade distributiva da multiplicação, aproveitar essa facilidade para justificar os seus passos

- Pedir que os alunos recorram aos casos notáveis para resolver a questão
- Fazer a ligação com os casos notáveis escritos ao lado
- Usar exemplos numéricos sempre que necessário
- Terminar resumindo aquilo que aprenderam: Já conhecem dois processos de fatorização de polinómios

8. Pedir aos alunos para arrumar e recolher as suas fichas de trabalho. (5min)

Anexo II – Plano de aula 2- 18 de Março 2013

Tema: Álgebra

Tópico: Equações

Subtópico: Operações com polinómios

Conteúdo/conceitos:

- Operações com polinómios: fatorização
- Equivalência entre expressões algébricas

Pré-Requisitos:

- Expressões algébrica
- Polinómio de 2.º grau
- Propriedade distributiva da multiplicação entre polinómios
- Fatorização de polinómios: fator em evidência e casos notáveis da multiplicação
- Resolução intuitiva de problemas envolvendo equações

Objetivos específicos:

- Compreender a equivalência entre expressões fatorizadas e em forma de polinómio
- Compreender processos algébricos de fatorização:
  Compreender e aplicar o processo de fatorização de colocar um fator em evidência

  Compreender e aplicar o processo de fatorização fazendo recurso a casos notáveis
- Reconhecer a fatorização como operação entre polinómios
- Compreender processos algébricos de fatorização:
  Compreender e aplicar o processo de fatorização de colocar um fator em evidência

  Introduzir fatorização fazendo recurso a casos notáveis

Dificuldades esperadas:

- Manipulação inversa de expressões algébricas: espera-se que os alunos não reconheçam facilmente os processos de fatorização como operação entre polinómios
- Reconhecer equivalência entre expressões algébricas
- Domínio dos casos notáveis da multiplicação
- Transmissão oral de raciocínios algébricos

Recursos:

- Ficha de trabalho: "Fatorização: Factor em evidência e casos notáveis"
- Quadro e marcadores coloridos

Desenvolvimento de Aula

1. Entrada em aula (2 min)
2. Distribuição das fichas de trabalho e esclarecimento do enunciado da primeira tarefa da ficha (2min)
3. Resolução da ficha de trabalho pelos alunos em díade (10 min)
   - Durante este momento, circularei pela sala de aula tirando dúvidas aos alunos e observando as suas resoluções, selecionando as díades que irei chamar durante a discussão
   - Aproveitarei também este momento para, rapidamente, registar no quadro somente as expressões algébricas presentes na ficha de trabalho de forma a não perder tempo durante a discussão da mesma.
   - Espera-se que os alunos encontrem uma expressão fatorizada para a área de cada

uma das figuras da segunda coluna e que, através da propriedade distributiva, identifiquem a expressão da primeira coluna que lhe corresponde.

4. Discussão/ Correção da tarefa em grande grupo (15 min)
   - Discussão conduzida por mim com o contributo dos alunos. Os alunos deverão ser responsáveis pela totalidade dos registos no quadro sendo a professora responsável por questionar e conduzir as dúvidas de forma a que os registos no quadro se apresentem sem erros.
   - Pedir as expressões a alunos diferentes e questionar sobre a existência de dúvidas no resto da turma.
   - Deve ser feita a resolução algébrica do exercício no quadro em conjunto com os alunos.
   - Depois de registar no quadro as expressões dadas pelos alunos deverei questionar que processos algébricos foram realizados. Os alunos não terão dificuldade em justificar a passagem da expressão fatorizada para polinómio, recorrendo à propriedade distributiva; a passagem inversa deve ser questionada pela professora e resolvida em grande grupo.
   - Em cada uma das figuras deve ficar registado no quadro o processo de fatorização utilizado, sem recurso à geometria
   - Nesta tarefa a geometria surge na ficha somente para que os alunos possam, em casa, revisitar as justificações
   - Num canto do quadro, deverão estar presentes os casos notáveis da multiplicação
   - Questionar os alunos com moderação sobre a existência de dúvidas, esta tarefa é uma revisitação à tarefa da aula anterior, não deverão surgir, por isso, muitas dúvidas. Questionar abusivamente os alunos pode causar desinteresse e desmotivação.
5. Leitura em conjunto do enunciado da segunda tarefa da ficha “Fatorização: Fator em evidência e casos notáveis” e esclarecimento de dúvidas sobre o mesmo (5min)
6. Resolução da tarefa pelos alunos em díade (10 min)
7. Pedir aos alunos para arrumar e recolher as suas fichas de trabalho. (1min)

Anexo III – Plano de aula 3 – 19 de Março de 2013

Tema: Álgebra

Tópico: Equações

Subtópico: Operações com polinómios e equações de 2º grau

Conteúdo/conceitos:

- Operações com polinómios: fatorização
- Equivalência entre expressões algébricas
- Equações de 2º grau incompletas
- Lei do anulamento do produto

Pré-Requisitos:

- Expressões algébrica
- Polinómio de 2.º grau
- Propriedade distributiva da multiplicação entre polinómios
- Processos de fatorização de polinómios
- Equivalência entre expressões fatorizadas e em forma de polinómio

Objetivos específicos:

- Compreender a equivalência entre expressões fatorizadas e em forma de polinómio
- Compreender processos algébricos de fatorização:
  Compreender e aplicar o processo de fatorização de colocar um fator em evidência

  Compreender e aplicar o processo de fatorização fazendo recurso a casos notáveis
- Identificar erros usuais em tarefas de fatorização de polinómios
- Saber transmitir oralmente ou por escrito processos de fatorização
- Introduzir a Lei do anulamento do produto após o confronto com ela
- Enunciar a Lei do anulamento do produto
- Tradução de linguagem natural para linguagem matemática envolvendo equações
- Resolução intuitiva de equações de 2.º grau incompletas

Dificuldades esperadas:

- Manipulação inversa de expressões algébricas: espera-se que os alunos não reconheçam facilmente os processos de fatorização como operação entre polinómios
- Reconhecer equivalência entre expressões algébricas
- Domínio dos casos notáveis da multiplicação
- Transmissão oral de raciocínios algébricos
- Na segunda tarefa da ficha ”Fatorização: Fator em evidência e casos notáveis”:
  - Na alínea b: os alunos terão dificuldade em corrigir o raciocínio do João através da fatorização do polinómio. Terão tendência a justificar o erro utilizando a propriedade distributiva, caberá ao professor chamar a atenção para essa situação e pedir aos alunos que justifiquem o erro do João apresentando aquela que deveria ser a resposta correta.
  - Na alínea c: os alunos não identificarão o erro e assumirão a resolução como certa, caso identifiquem o erro, mais uma vez o voltarão a justificar fazendo recurso da propriedade distributiva da multiplicação.

- Na ficha “Lei do anulamento do produto”
    - Nas alíneas em que a resposta é dupla os alunos terão dificuldade em identificar duas soluções para o problema

Recursos:

- Ficha de trabalho: “Fatorização: For em evidência e casos notáveis”
- Ficha de trabalho: “ Lei do anulamento do produto”
- Tarefa Extra
- Quadro e marcadores coloridos

Desenvolvimento de Aula

1. Entrada em aula e distribuição das fichas de trabalho (5 min)

2. Leitura em conjunto do enunciado da segunda tarefa da ficha “Fatorização: Fator em evidência e casos notáveis” (5min)

3. Discussão/ Correção da tarefa em grande grupo (25 min)
    - Discussão conduzida por mim com o contributo dos alunos. Os alunos deverão ser responsáveis pela totalidade dos registos no quadro sendo a professora responsável por questionar e conduzir as dúvidas de forma a que os registos no quadro se apresentem sem erros.
    - Pedir respostas a alunos diferentes e questionar sobre a existência de dúvidas no resto da turma, as dúvidas deverão ser esclarecidas pelos próprios alunos
    - Pedir aos alunos que apresentem a justificação através da fatorização de polinómios, ou seja, que apresentem eles uma correção para o exercício
    - É importante, neste o momento, o professor fazer gestão das intervenções de forma a que os alunos não se sobreponham e toda a gente tenha oportunidade de participar.

4. Distribuições da ficha de trabalho “Lei do anulamento do produto” enquanto os alunos terminam de fazer os seus registos na ficha anterior (5min)

5. Apresentação da tarefa e esclarecimento de dúvidas sobre o enunciado (2min)

6. Resolução da tarefa em díade (10 min)
    - Durante este momento, circularei pela sala de aula tirando dúvidas aos alunos e observando as suas resoluções, selecionando as díades que irei chamar durante a discussão

7. Discussão/ Correção da tarefa em grande grupo (10m)
    - Apresentar o raciocínio dos alunos por escrito no quadro
    - Nas três últimas alíneas os alunos terão de ser confrontados com a existência de mais de uma solução para o problema colocado.
    - Confrontar sempre que possível os alunos com o facto de que o produto de dois ou mais números é zero sempre que um deles é zero.

8. Apresentação e registo no quadro da tarefa extra: “Quando é que o produto entre

dois ou mais fatores é zero?" (2min)

9. Resolução/discussão/correção em grande grupo (10min)
    - Pretende-se que os alunos concluam a Lei do anulamento do produto por eles próprios
    - Apresentas exemplos numéricos sempre que necessário

O quadro deverá ficar estruturado da seguinte forma:

Lei do Anulamento do Produto

Para que o produto de dois ou mais fatores seja zero basta que um deles seja zero.

Exemplo:

$5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\quad$ $5 \times 0 = 0$ √

$2 \times (x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $\quad$ $2 \times (1 - 1) = 0$ √

10. Apresentação e registo no quadro da tarefa extra e esclarecimentos sobre a mesma (5 min)

11. Resolução da tarefa pelos alunos em díade (10 min)

    - Durante este momento, circularei pela sala de aula tirando dúvidas aos alunos e observando as suas resoluções, selecionando as díades que irei chamar durante a discussão

12. Pedir aos alunos para arrumar e recolher as suas fichas de trabalho. (1min)

Anexo IV – Plano de aula 4 – 24 de Março

Tema: Álgebra

Tópico: Equações

Subtópico: Equações de 2.º grau

Conteúdo/conceitos:

- Lei do anulamento do produto: revisão (?)
- Resolução de equações de 2.º grau incompletas
- Resolução de equações de 2.º grau completas com casos notáveis

Pré-Requisitos:

- Equivalência entre polinómio e a sua fatorização
- Fatorização de polinómios
- Lei do anulamento do produto
- Resolução de equações de 1º grau

Objetivos específicos:

- Compreender e aplicar adequadamente processos de fatorização na resolução de equações de 2.º grau
- Compreender e aplicar adequadamente a Lei do anulamento do produto na resolução de equações de 2.º grau
- Distinguir os diferentes tipos de equações de 2.º grau (completas, incompletas em b, incompletas em c) e aplicar os processos de resolução de equações mais eficazes para cada um deles
- Reconhecer e identificar a solução da equação de 2.º grau
- Compreender o significado de solução de equação de 2.º grau

Dificuldades esperadas:

- Na primeira tarefa da ficha de trabalho:
  - Identificar erros feitos pelos alunos
  - Dificuldade em justificar oralmente ou por escrito os erros assinalados
  - Dificuldade em corrigir os erros, os alunos terão tendência a resolver, eles próprios, a equação e confrontar o resultado obtido com o resultado do enunciado ao invés de identificar e corrigir os erros cometidos pelso alunos do enunciado.
- Na segunda tarefa da ficha de trabalho:
  - Compreender os processos utilizados na resolução das equações
- Na terceira tarefa da ficha de trabalho:
  - Simplificação da equação: operações com polinómios e monómios
  - Aplicação de técnicas de fatorização, sobretudo os casos notáveis
  - Aplicação da Lei do anulamento do produto
  - Reconhecer uma expressão já fatorizada e anulada
  - Identificação do conjunto-solução das equações
- Comunicar e transmitir oralmente raciocínios algébricos

Recursos:

- Ficha de trabalho: "Equações de 2º grau"
- Quadro e marcadores coloridos

Desenvolvimento de Aula

1. Entrada em aula e distribuição das fichas de trabalho (5 min)

2. Distribuição das fichas de trabalho e apresentação oral do enunciado da primeira tarefa da ficha de trabalho e esclarecimento de dúvidas sobre os mesmo (5min)
   - É importante que fique claro junto dos alunos que os erros encontrados deverão estar devidamente assinalados e justificados.
3. Resolução da tarefa pelos alunos em díade (15 min)
   - Durante este momento, circularei pela sala de aula tirando dúvidas aos alunos e observando as suas resoluções, selecionando as díades que irei chamar durante a discussão
   - Aproveitarei também este momento para, rapidamente, registar no quadro as equações da tarefa de forma a não perder tempo durante a discussão da mesma.
   - Durante este momento, é importante que se deixe os alunos trabalhar autonomamente. É uma tarefa de descoberta de erro, por isso é importante que sejam os alunos a identificar o erro, pois só assim poderão refletir nele e não o repetir.
   - Pedir que a verificação da solução da equação seja feita no final da tarefa
4. Discussão/ Correção da tarefa em grande grupo (15 min)
   - Discussão conduzida por mim com o contributo dos alunos. Os alunos deverão ser responsáveis pela totalidade dos registos no quadro sendo a professora responsável por questionar e conduzir as dúvidas de forma a que os registos no quadro se apresentem sem erros.
   - Pedir intervenção a alunos diferentes e questionar sobre a existência de dúvidas no resto da turma.
   - Deve constar no quadro onde se encontra o erro em cada uma das equações, a justificação deve ser feita oralmente e sempre que possível por escrito.
   - A verificação da solução apresentada pela Anabela, Bernardo e Catarina devem ser verificadas após os erros se assinalarem e justificarem
   - Sempre que necessário a lei do anulamento do produto deve ser escrita no quadro, apoiada com exemplos numéricos, se necessário.
   - Apontar os erros feitos pela Anabela e pelo Bernardo como os erros mais frequentes dos alunos.

5. Apresentação da segunda tarefa e esclarecimento de dúvidas sobre o enunciado (2 min)
6. Resolução da tarefa pelos alunos em díade (10 min)
   - Durante este momento, circularei pela sala de aula tirando dúvidas aos alunos e observando as suas resoluções, selecionando as díades que irei chamar durante a discussão
   - Aproveitarei também este momento para, rapidamente, registar no quadro as equações da tarefa de forma a não perder tempo durante a discussão da mesma. É também importante que as equações fiquem registadas lado a lado e com espaço para eventuais anotações.
7. Discussão/Correção da tarefa em grande grupo (10 min)
   - Deverão ser os alunos a preencher os espaços em branco e a explicar os seus raciocínios.
   - Sempre que possível as justificações devem ficar registadas no quadro com uma cor diferente.
   - Deverão ser sempre os alunos a esclarecer as dúvidas que surgirem.
   - A professora deve sempre corrigir o discurso dos alunos de forma a este se tornar mais adequado ao tema em questão. É importante que os alunos se habituem a usar corretamente os termos e as expressões.
   - Sempre que surjam dúvidas em regras algébricas, as justificações deverão apoiar-se em exemplos numéricos.

8. Apresentação e esclarecimento de dúvidas sobre o enunciado da terceira tarefa (2 min)
9. Resolução da tarefa pelos alunos em díade (20 min)
   - Durante este momento, circularei pela sala de aula tirando dúvidas aos alunos e observando as suas resoluções, selecionando as díades que irei chamar durante a discussão
   - Aproveitarei também este momento para, rapidamente, registar no quadro as três primeiras equações da tarefa de forma a não perder tempo durante a discussão da mesma.
   - Conforme as resoluções forem feitas no lugar, pedirei a alguns alunos para irem escrever a sua resolução no quadro. Este processo deve ser silencioso para que os restantes alunos continuem a trabalhar as suas resoluções.
   - Avisar os restantes alunos, que a resolução feita no quadro não estará necessariamente certa, e que, por isso, não a devem passar para a sua ficha.

   Nota: a discussão não será feita durante esta aula. As resoluções apresentadas pelos alunos no quadro devem ficar registadas pelo professor.

10. Pedir aos alunos para arrumar e recolher as suas fichas de trabalho. (5min)

Anexo V – Plano de aula nº 5 – 25 de Março

Tema: Álgebra

Tópico: Equações

Subtópico: Equações de 2.º grau

Conteúdo/conceitos:

- Lei do anulamento do produto: revisão (?)
- Resolução de equações de 2.º grau incompletas
- Resolução de equações de 2.º grau completas com casos notáveis

Pré-Requisitos:

- Equivalência entre polinómio e a sua fatorização
- Fatorização de polinómios
- Lei do anulamento do produto
- Resolução de equações de 1º grau

Objetivos específicos:

- Compreender e aplicar adequadamente processos de fatorização na resolução de equações de 2.º grau
- Compreender e aplicar adequadamente a Lei do anulamento do produto na resolução de equações de 2.º grau
- Distinguir os diferentes tipos de equações de 2.º grau (completas, incompletas em b, incompletas em c) e aplicar os processos de resolução de equações mais eficazes para cada um deles
- Reconhecer e identificar a solução da equação de 2.º grau
- Compreender o significado de solução de equação de 2.º grau

Dificuldades esperadas:

- Simplificação da equação: operações com polinómios e monómios
- Aplicação de técnicas de fatorização, sobretudo os casos notáveis
- Aplicação da Lei do anulamento do produto
- Reconhecer uma expressão já fatorizada e anulada
- Identificação do conjunto-solução das equações
- Comunicar e transmitir oralmente raciocínios algébricos

Recursos:

- Ficha de trabalho: "Equações de 2º grau"
- Mini-Teste
- Quadro e marcadores coloridos

Desenvolvimento de Aula

1. Entrada em aula, distribuição das fichas de trabalho e apresentação oral do enunciado da terceira tarefa da ficha de trabalho e esclarecimento de dúvidas sobre os mesmo (5min)
   - Esta aula é apenas de 45minutos, a entrada em aula deverá ser o mais breve possível e os alunos deverão começar a trabalhar desde logo
   - É importante que o professor chegue antes à aula para ter tempo de registar as resoluções dos alunos no quadro.
2. Discussão/ Correção das primeiras 3 alíneas da tarefa em grande grupo (20 min)
   - Discussão conduzida por mim com o contributo dos alunos. Os alunos deverão ser responsáveis pela totalidade dos registos no quadro sendo a professora

responsável por questionar, conduzir as dúvidas e corrigir o discurso dos alunos.

- Garantir que, no final da discussão, os registos no quadro não contenham erros e que haja uma boa gestão do uso de cores e do espaço do quadro
- Pedir intervenção a alunos diferentes e questionar sobre a existência de dúvidas no resto da turma.
- Os alunos cuja resolução está no quadro serão chamados a intervir sempre que alguma dúvida sobre a sua resolução surgir.
- A professora deve incentivar os outros alunos a questionar as resoluções ao invés de se limitarem a passar o que está no quadro
- Exemplos numéricos devem ser dados sempre que surja uma dúvida sobre uma regra algébrica.

3. Entrega e esclarecimento do enunciado do mini-teste (2 min)

4. Resolução dos mini-testes em díade. (15 min)

5. Pedir aos alunos para arrumar e recolher os mini-testes e as fichas de trabalho. (5min)

Anexo VI – Plano de aula nº 6 – 26 Março 2013

Tema: Álgebra

Tópico: Equações

Subtópico: Equações de 2.º grau

Conteúdo/conceitos:

- Resolução de equações de 2.º grau incompletas
- Resolução de equações de 2.º grau completas com casos notáveis
- Resolução de problemas envolvendo equações de 2º grau

Pré-Requisitos:

- Equivalência entre polinómio e a sua fatorização
- Fatorização de polinómios
- Lei do anulamento do produto
- Resolução de equações de 1º grau
- Resolução de equações de 2º grau

Objetivos específicos:

- Compreender e aplicar adequadamente processos de fatorização na resolução de equações de 2.º grau
- Compreender e aplicar adequadamente a Lei do anulamento do produto na resolução de equações de 2.º grau
- Distinguir os diferentes tipos de equações de 2.º grau (completas, incompletas em b, incompletas em c) e aplicar os processos de resolução de equações mais eficazes para cada um deles
- Reconhecer e identificar a solução da equação de 2.º grau
- Compreender o significado de solução de equação de 2.º grau
- Compreensão e interpretação de problemas envolvendo equações de 2.º grau

Dificuldades esperadas:

- Simplificação da equação: operações com polinómios e monómios
- Aplicação de técnicas de fatorização, sobretudo os casos notáveis
- Aplicação da Lei do anulamento do produto
- Reconhecer uma expressão já fatorizada e anulada
- Identificação do conjunto-solução das equações
- Interpretação do significado de solução da equação
- Comunicar e transmitir oralmente raciocínios algébricos

Recursos:

- Ficha de trabalho: "Equações de 2º grau" e "Problemas envolvendo equações de 2º grau"
- Quadro e marcadores coloridos

Desenvolvimento de Aula

1. Entrada em aula, distribuição das fichas de trabalho (5min)
2. Continuação da resolução da terceira tarefa pelos alunos em díade (10 min)
   - Durante este momento, circularei pela sala de aula tirando dúvidas aos alunos e observando as suas resoluções, selecionando as díades que irei chamar durante a discussão
   - Aproveitarei também este momento para, rapidamente, registar no quadro as três últimas equações da tarefa de forma a não perder tempo durante a discussão da

mesma.

- Conforme as resoluções forem sendo feitas no lugar, pedirei a alguns alunos para irem escrever a sua resolução no quadro. Este processo deve ser silencioso para que os restantes alunos continuem a trabalhar as suas resoluções.
- Avisar os restantes alunos, que a resolução feita no quadro não estará necessariamente certa, e que, por isso, não a devem passar para a sua ficha, até esta ser discutida em grupo.

3. Discussão/ Correção das últimas 3 alíneas da tarefa em grande grupo (10 min)
    - Discussão conduzida por mim com o contributo dos alunos. Os alunos deverão ser responsáveis pela totalidade dos registos no quadro sendo a professora responsável por questionar, conduzir as dúvidas e corrigir o discurso dos alunos.
    - Garantir que, no final da discussão, os registos no quadro não contenham erros e que haja uma boa gestão do uso de cores e do espaço do quadro
    - Pedir intervenção a alunos diferentes e questionar sobre a existência de dúvidas no resto da turma.
    - Os alunos cuja resolução está no quadro serão chamados a intervir sempre que alguma dúvida sobre a sua resolução surgir.
    - A professora deve incentivar os outros alunos a questionar as resoluções ao invés de se limitarem a passar o que está no quadro
    - Exemplos numéricos devem ser dados sempre que surja uma dúvida sobre uma regra algébrica.
    - Terminar com a indicação de que as equações presentes na fichas estão arrumadas por tipo, para que os alunos registem esta informação. Desta forma o seu estudo autónomo ficará mais orgazinado.

      Nota: Caso a resolução da tarefa se realize em menos tempo, apresentar as três alíneas extra.
4. Distribuição da ficha de trabalho "Problemas envolvendo equações de 2º grau" (2 min)
5. Apresentação do enunciado da primeira tarefa e esclarecimento de dúvidas sobre o mesmo (5 min)
6. Resolução da primeira tarefa pelos alunos em díade (10 min)
    - Durante este momento, circularei pela sala de aula tirando dúvidas aos alunos e observando as suas resoluções, selecionando as díades que irei chamar durante a discussão
    - Aproveitarei também este momento para, rapidamente, registar as alíneas no quadro.
    - Sendo esta tarefa de uma natureza mais complexa, é normal que os alunos tenham alguma dificuldade em realizá-la autonomamente. Caso passados 5 minutos do tempo atribuído à resolução da tarefa, os alunos não verifiquem evolução no raciocínio, a professora deve interromper o trabalho autónomo e resolver a tarefa em grande grupo com os alunos, sempre com a intervenção dos mesmos, e traduzindo as alíneas para linguagem corrente (por exemplo: " Se as soluções de uma equação são zero e um, que equação poderá ser?" ou " Quando é que uma equação tem zero e um como solução?")

7. Discussão/ Correção da primeira tarefa em grande grupo (25 minutos)
    - Discussão conduzida por mim com o contributo dos alunos. Os alunos deverão ser responsáveis pela totalidade dos registos no quadro sendo a professora responsável por questionar, conduzir as dúvidas e corrigir o discurso dos alunos.
    - Garantir que, no final da discussão, os registos no quadro não contenham erros e que haja uma boa gestão do uso de cores e do espaço do quadro

- Pedir intervenção a alunos diferentes e questionar sobre a existência de dúvidas no resto da turma.
- Apresentar, sempre que possível, diferentes equações para um mesmo conjunto-solução
- É importante que os alunos sejam confrontados com o conceito de solução.

8. Resolução da segunda e terceira tarefas pelos alunos em díade (10 min)
   - Durante este momento, circularei pela sala de aula tirando dúvidas aos alunos e observando as suas resoluções, selecionando as díades que irei chamar durante a discussão
   - Aproveitarei também este momento para, rapidamente, registar as alíneas no quadro.
   - Sendo esta uma tarefa de resolução de problemas é importante que as intervenções junto das díades sejam comedidas.

9. Discussão/Correção das tarefas em grande grupo (10 minutos)
   - A segunda tarefa, tendo uma componente problemática muito baixa (basta que os alunos percebam que têm de igualar os perímetros das duas figuras), tenderá a ser resolvida mais rapidamente.
   - A terceira tarefa terá de verificar os seguintes passos:
     - Identificar o comprimento do lado do quadrado como x.
     - Definir a expressão da área reservada ao cão em função de x.
     - Igualar essa expressão a 15.
     - Resolver a equação em ordem a x.
     - Interpretar a solução obtida no contexto do problema e dar-lhe uma resposta.
   - Estes passos deverão ficar registados no quadro com cuidado, de forma a que se não se confundam.
   - A terceira tarefa poderá ser resolvida pelos alunos recorrendo a uma estratégia tentativa-erro. Caso aconteça, a resolução deverá ser apresentada em primeiro lugar, servindo a resolução algébrica para confirmação. É, depois, importante que se reforce que o método de resolução algébrico, envolvendo equações de 2.º grau, será um método geral e que poderia ser aplicado, com pequenas modificações, mesmo que as dimensões do espaço reservado ao cão se alterassem enquanto que a estratégia de tentativa-erro, nessa situação, falharia.

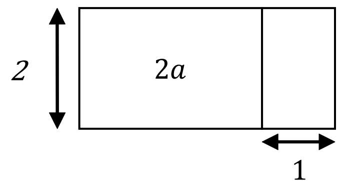
10. Pedir aos alunos para arrumar e recolher as suas fichas de trabalho. (5min)

matemática

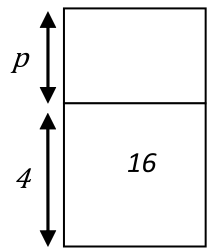
ID : ______________________ DATA : __________ oito

1. Em cada uma das figuras A, B, C e D apresentadas em baixo estão representados retângulos. Cada um desses retângulos está dividido em várias partes. Com a informação que é dada em cada retângulo, escrevam uma expressão que permita calcular a área de cada um deles.

A

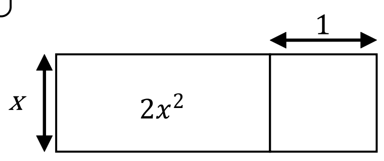


B

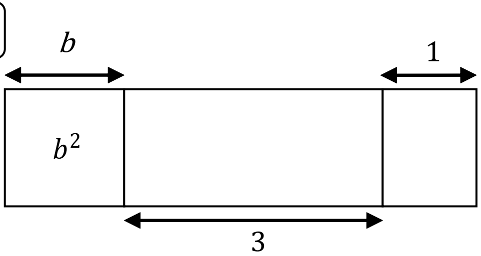


______________________ ______________________

C



D



______________________ ______________________

Tarefa Extra: Exatamente com o mesmo enunciado da questão 1 da ficha nº 1

Extra

L^2	$3L$
$3L$	9

Anexo VIII – Ficha nº 2: fator em evidência e casos notávis

1. Façam a correspondência entre as figuras e as expressões das suas áreas.

$$A_1 = x^2 + 2x + 1$$

$$A_2 = x^2 - 5x$$

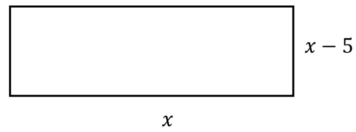
$$A_3 = x^2 - 8x + 16$$

$$A_4 = 3x^2 - 3$$

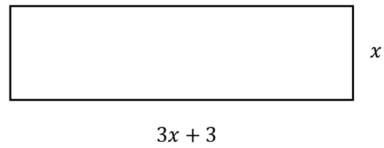
$$A_5 = 3x^2 + 3x$$

$$A_6 = x^2 - 4$$

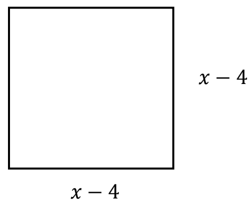
F_1



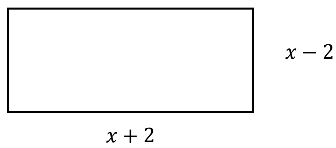
F_2



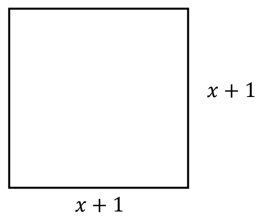
F_3



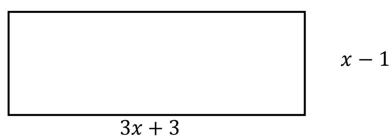
F_4



F_5



F_6



2. O João resolveu uma questão do teste de matemática em que era pedido que se fatorizasse alguns polinómios. Resolveu a questão da seguinte forma:

a. $4a^2 + 4a = 4a \times (a+1)$

b. $16b^2 + 40b + 25 = (4b+25)^2$

c. $25c^2 - 9 = (5c - 3)^2$

Assinalem os erros do João e resolvam corretamente.

Anexo IX – Ficha nº3: lei do anulamento do produto

matemática

ID : ______________________ DATA : __________ oito

1. Nas alíneas seguintes descubram os números inteiros pedidos. Expliquem como pensaram para descobrir os números.

   1.1. Qual o número cujo dobro da diferença entre esse número e um é zero?

   1.2. Quais os números cuja diferença entre o seu triplo e o seu quadrado é zero?

   1.3. Quais os números cujo dobro adicionado com o seu quadrado é igual a zero?

   1.4. Quais os dois números consecutivos cujo produto é zero?

Anexo X – Ficha nº 4: equações de 2.º grau

matemática

ID : ______________________ DATA : __________ oito

1. Três amigos, a Anabela, o Bernardo e a Catarina, resolveram a mesma equação na aula de matemática mas chegaram a soluções diferentes. Em baixo apresenta-se a resolução de cada um deles, mas apenas uma está correta.

Anabela	Bernardo	Catarina
$3x^2-6x=0$ $3x^2=0\ e\ 6x=0$ $x^2=0\ e\ x=0$ $x=0\ e\ x=0$ $S=\{0\}$	$3x^2-6x=0$ $x(3x-6\}=0$ $x=0\ \vee\ 3x-6=0$ $x=0\ \vee\ x=6-3$ $x=0\ \vee\ x=3$ $S=\{0,3\}$	$3x^2-6x=0$ $x(3x-6\}=0$ $x=0\ \vee\ 3x-6=0$ $x=0\ \vee\ 3x=6$ $x=0\ \vee\ x=2$ $S=\{0,2\}$

Qual dos amigos resolveu corretamente a equação? Justifiquem a vossa resposta explicando os erros que os outros dois cometeram.

2. Resolvam as seguintes equações completando os espaços em branco.

A

$\boldsymbol{x(2x+1)=7x}$

$\Leftrightarrow$ ____ $+\,x=7x$

$\Leftrightarrow 2x^2-$ ___ $=0$

$\Leftrightarrow$ ____ $\times\,(x-3)=0$

$\Leftrightarrow x=$ ___ $\vee\, x-$ ___ $=0$

$\Leftrightarrow x=$ ___ $\vee\, x=$ ____

$S=$

B

$\boldsymbol{x^2+2x=-1}$

$\Leftrightarrow x^2+$ ___ $+$ ___ $=$ ___

$\Leftrightarrow ($ ___ $+$ ___ $)^2=0$

$\Leftrightarrow ($ ___ $+1)($ ____ $+$ ___ $)=0$

$\Leftrightarrow x+$ ___ $=$ ___ $\vee\, x+$ ___ $=0$

$\Leftrightarrow x=$ ___ $\vee\, x=$ ___

$S=$

C

$\boldsymbol{6x^2-24=0}$

$\Leftrightarrow 6x^2=$ ___

$\Leftrightarrow x^2=$ ___

$\Leftrightarrow x=$ ___ $\vee\, x=$ ___

$S=$

3. Determinem as soluções das seguintes equações indicando os cálculos que efetuarem.

a. $t^2 - 143 = 1$

b. $(b - 7)(b + 7) = 24$

c. $(2x - 3)(3 + 2x) = -5$

d. $\frac{2}{3}x^2 = x$

e. $(y - 11)^2 - 20 = 101$

f. $n(2n + 2) = 9$

g. $(5m - 3)^2 = 0$

h. $36t^2 - 36t = -9$

i. $81x^2 = -72x + 16$

Anexo XI – Ficha nº 5: problemas com equações de 2.º grau

matemática

ID : ______________________________ DATA : __________ oito

1. Para cada uma das alíneas, escrevam uma equação de segundo grau que satisfaça o conjunto solução indicado e apresentem-na na sua forma canónica.
   1.1. $S = \{-25\ ,\ 0\}$

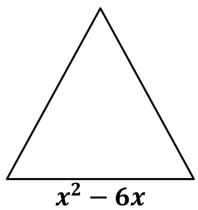
   1.2. $S = \{-1\ ,\ 125\}$

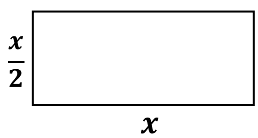
   1.3. $S = \{4\}$

   1.4. $S = \{0\}$

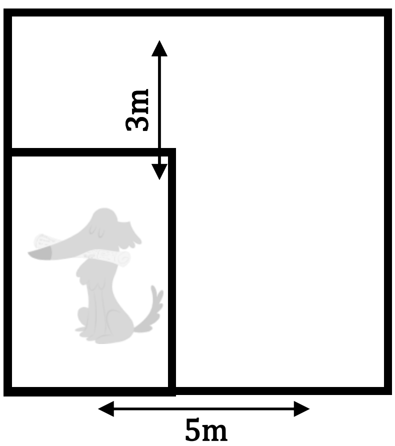
   1.5. $S = \emptyset$

2. Na figura ao lado estão representados um triângulo equilátero e um retângulo com informação sobre as medidas dos seus lados. Sabendo que o perímetro do retângulo é igual ao perímetro do triângulo, quais os comprimentos dos lados de cada um deles. Indica todos os cálculos que efetuares.





3. O meu vizinho tem um quintal quadrangular no qual vai fazer uma horta, mas quer deixar um espaço livre para o seu cão andar à vontade. Para tal vai reservar um recanto de forma retangular no quintal como se indica na figura.Sabendo que o espaço destinado ao cão do meu vizinho tem 15m² de área, descubram qual a área do quintal destinada à horta.



Anexo XII – Mini teste

matemática   MINI TESTE 10

oito

ID : ________________________________   **DATA :** ___________

1. Considerem a seguinte equação:
(8/20)

$$(x-2)(x+2) = 2x - 4.$$

1.1. Indiquem qual o valor lógico das seguintes afirmações, justificando.

a. Zero é a solução da equação.

b. -2 e 2 são soluções da equação.

c. 2 é solução da equação.

d. É uma equação de 2.º grau completa.

1.2. Resolvam a equação, indicando o seu conjunto-solução.
(12/20)

Anexo XIII – Teorema Fundamental da Álgebra

Todo o polinómio p(z), em $\mathbb{C}[z]$ de grau *n* maior ou igual a 1, tem uma raíz em $\mathbb{C}$. Isto é, $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, portanto, a equação p(z)=0 tem *n* soluções não necessariamente distintas.